HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för

TENTAMEN

Kurs: Envariabelanalys, 10 hp

Examinationsmoment: 1001 Salstentamen

Kurskod: MA01XG

Högskolepoäng för examinationsmomentet: 6

Datum: 2026-03-20

Tentamenstid: 14:30—18:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Berörda lärare: Konstantinos Tsougkas

Hjälpmedel/bilagor: Formelblad bifogas

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser: 3: 21, 4: 28, 5: 35 av maximalt 42.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 7

Kurs: **MA01XG Envariabelanalys**, 10 hp, Tentamen omfattar 6 hp
Tentamensdag: **2026-03-20**
Hjälpmedel : Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad. Ej räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg 5, 4, 3 eller U (underkänd), utifrån i hur hög grad inlämnade lösningar visar på uppfyllnad av kursmålen.
Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.
Med ett *analytiskt uttryck* menar vi ett uttryck som använder de fyra räknesätten, potenser, kvadratrötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, t.ex. $x^2e^{-x^3} + \ln \frac{\cos x}{x}$. Numeriska värden kan, om inget annat sägs, anges som förenklade analytiska uttryck där faktorer som π och e kan ingå utöver "rena siffror", t.ex. $\frac{7}{2} + 5e^3 \sin(\pi/7)$.
Sista sidorna består av en formelsamling med bland annat derivator och primitiva funktioner (obestämda integraler) till några standardfunktioner.
Följande kursmål bedöms på denna tentamen

- beskriva betydelse av och egenskaper hos begrepp som derivata och integral,
- koppla ihop fysiska modeller med en matematisk beskrivning inom kursens område,
- visa förståelse för och korrekt använda matematisk terminologi inom kursens område,
- ta till sig, presentera och diskutera matematiska och logiska resonemang på ett begripligt sätt med lämplig terminologi och stringens,
- använda algebraiska och analytiska egenskaper och metoder inom kursens område,
- analytiskt utveckla integraler och lösa differentialekvationer av vissa slag,
- värdera giltigheten hos matematiska resonemang och matematiska modeller.

Betygskriterier: *För godkänt betyg, 3* krävs att studenten i tentamen har visat måluppfyllelse på ett nöjaktigt sätt. I detta ingår att använda och förklara principer relaterade till kursmålen på ett i övervägande felfritt och begripligt sätt, kunna lösa problem relaterade till kursmålen av rimlig svårighets- och komplexitetsgrad med viss säkerhet och utan större fel, och kommunicera matematiska resonemang och beräkningar på ett tillräckligt tydligt och förståeligt sätt enligt vedertagna former.
För högre betyg 4 och 5 ska i ökande grad studenten visa god förståelse av principer, stor säkerhet och endast smärre fel vid användandet av dem och vid problemlösning, kunna ta sig an problem av större komplexitet, och kommunicera med god tydlighet och stil.
Kvantitivt bedöms var och en av de sju avdelningarna med upp till 6 poäng. För betyg 3 krävs minst 21 poäng totalt, för betyg 4 28 poäng och för betyg 5 35 poäng.

1. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? Du kan svara sant, falskt eller pass och behöver inte skriva någon motivering. Pass ger 0 poäng, annars ger rätt svar ger +1 poäng och felaktigt svar −1. Hela uppgiften kan aldrig ge negativt poäng.

   (a) Om f är en funktion som är deriverbar i varje punkt på det öppna intervallet $]0,1[$ så finns det alltid ett tal $a \in]0,1[$ så att $f(a) \leq f(x)$ för varje tal $x \in]0,1[$, dvs det finns en punkt i intervallet där f tar sitt minimala värde.

   (b) Om f är en funktion som är deriverbar i varje punkt på det slutna intervallet $[0,1]$ så finns det alltid ett tal $a \in [0,1]$ så att $f(a) \leq f(x)$ för varje tal $x \in [0,1]$, dvs det finns en punkt i intervallet där f tar sitt minimala värde.

   (c) Om $g(x) = \sin(x^2)$ så är $g'(x) = \cos(x^2)$.

   (d) $\left|\int_{-1}^{1} \sin(kx^4)\,dx\right| \leq 2$ oavsett värde på k. (Du behöver inte beräkna integralen.)

   (e) Om $F'(x) = f(x)$ och $G'(x) = g(x)$ på intervallet $[a,b]$ så gäller att $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$.

   (f) Om $F'(x) = f(x)$ och $G'(x) = g(x)$ på intervallet $[a,b]$ så gäller att $\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)G(b)-F(a)G(a)$.

2. För vart och ett av följande fall, bestäm om funktionen $f(x)$ tar ett största värde respektive ett minsta värde på intervallet $[0,1]$, och i så fall för vilket eller vilka värden på x dessa max och/eller min antas.

   (a) $f(x) = (x^2-1)^4$

   (b) $f(x) = x(x^2-1)^4$

3. Låt $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{2x}$ för $x \neq 0$.

   (a) Bestäm ett uttryck för $f'(x)$.

   (b) Har $f(x)$ ett gränsvärde då $x \to 0$? Vad är i så fall detta gränsvärde?

   (c) Har $f'(x)$ ett gränsvärde då $x \to 0$? Vad är i så fall detta gränsvärde?

(fortsätter nästa sida)

4. (a) Låt f vara en styckvis konstant funktion där

$$f(x) = (-1/2)^n \text{ om } x \in [n, n+1[\quad \text{för varje heltal } n.$$

Vad är värdet av integralen

$$\int_0^4 f(x)\,dx\,?$$

(b) För samma funktion f, är den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

konvergent eller divergent? Om konvergent, vad är dess värde?

(c) Är den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}dx$$

konvergent? Vad är i så fall värdet av integralen?

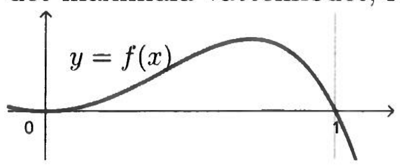
5. En vattentank fylls på till volym V med ett vattenflöde

$$\frac{dV}{dt} = cf(t/T)$$

beroende av tiden t, där

$$f(x) = 4x^2\left(1 - x^2\right),$$

med start vid $t = 0$ och stopp vid $t = T$, ($x = 1$). Parametrarna c och T är det maximala vattenflödet, respektive hur lång tid fyllandet pågår.



(a) Uttryck den påfyllda volymen efter att påfyllningen är klar som en integral.

(b) Utveckla integralen som ett uttryck i T och c.
(Variabelbytet $t = Tx$ kan underlätta.)

(c) Bestäm värdet på parametern c så att det fylls 16 kubikmeter om påfyllnadstiden T är fem minuter. Använd lämplig enhet.

(fortsätter nästa sida)

6. (a) Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} - 4xy = 8x$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y = y_0 = 0$ då $x = 0$.

(b) Bestäm en lösning $y = f(x)$ till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + 1)(e^x + e^{-x})$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $f(0) = 1$.

7. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 10y' + 9y = 0$$

där $y' = \frac{dy}{dx}$ och $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

(b) Bestäm en lösning $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y'' + 10y' + 9y = 30e^{-4x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = -2$.

Lycka till! /SK&KT

Formelsamling Matematik

Trigonometriska identiteter

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(\alpha))^2$

$(\cos(\frac{\alpha}{2}))^2 = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$

$(\sin(\frac{\alpha}{2}))^2 = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$

Standardgränsvärden

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{t}{x})^x = e^t$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a>1)$

$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0 \quad (q>0)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0 \quad (q>0)$

$\lim_{x\to 0^+} x^p(\ln(x))^q = 0 \quad (p>0)$

$\lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!} = 0$ (m heltal)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a) \quad (a>0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Elementära deriveringsregler

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Elementära integreringsregler

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad (u=g(x))$$

För dessa regler finns naturligtvis också varianter för obestämda integraler. Eventuella förutsättningar måste naturligtvis vara uppfyllda.

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C(\text{ om } a\neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln\|x\|+C$
e^x	e^x	e^x+C
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x\ln\|x\|-x+C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)+C$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2$	$-\ln\|\cos(x)\|+C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
a^x	$a^x\ln(a)$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\frac{x\ln(x)-x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln\|x+\sqrt{a+x^2}\|+C$
$\frac{1}{(\cos(x))^2}$		$\tan(x)+C$
$\frac{1}{(\sin(x))^2}$		$-\cot(x)+C$

Taylors formel

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x)$ är resttermen av ordning (n+1) som till exempel kan uppskattas med $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ är något tal mellan a och x (vanlligtvis vet man inte exakt vilket tal ξ är).

Potensserieutvecklingar

Funktion	Serieutveckling	Konvergensintervall
$(1+x)^a$	$1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1<x<1$
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ldots$	$-1<x\leq 1$
$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\ldots$	$-1\leq x\leq 1$

Geometrisk summa och serie

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots ax^n=a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad(\text{om } x\neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots=\frac{a}{1-x}\quad(\text{om } |x|<1)$$