

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs Matematik 3, behörighetsgivande kurs och Matematik för tekniker G1N

Delkurs

Kurskod MA010B/MA137G

Högskolepoäng för tentamen 12

Datum 2024-08-23

Skrivtid 08:15-12:30

Ansvarig lärare Jessica Tidblom

Berörda lärare Konstantinos Tsoukas

Hjälpmedel/bilagor Del I: Bifogat formelblad.
Del 2: Miniräknare och bifogat formelblad.

Övrigt Studenten får båda delarna samtidigt. Studenterna behöver lämna in lösningarna för DEL I innan de får tillgång till miniräknare och startar med för DEL II. Studenten kan vid behov påbörja DEL II utan räknare.

- Anvisningar
- Ta nytt blad för varje lärare
 - Ta nytt blad för varje ny fråga
 - Skriv endast på en sida av papperet.
 - Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - Numrera lösbladen löpande.
 - Använd inte röd penna.
 - Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser Tentamensbetyg G: 17 poäng
Tentamensbetyg VG: 27 poäng varav 7 poäng på VG-nivå.
Totalt antal möjliga poäng är 40.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA010B, Matematik 3, behörighetsgivande kurs
MA137G, Matematik för tekniker G1N
2024-08-23, kl 8.15–12.30

Hjälpmedel:

- Del I: Bifogat formelblad.
- Del II: Bifogat formelblad och godkänd miniräknare.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänt(VG), Godkänt(G) eller Underkänt(U). Tentamen består av två delar: Del I och II och tillsammans kan de ge 40 poäng varav 14 VG-poäng.

Kravgräns för tentamensbetyget:

G: 17 poäng

VG: 27 poäng varav minst 7 poäng på VG-nivå.

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (G eller VG) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (2/1) att en korrekt lösning ger två poäng på G-nivå och ett poäng på VG-nivå.

Till uppgifter där endast svar krävs behöver du endast ge ett kort svar i avsedd område på uppgiftsbladet. Till andra uppgifter behöver du lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter på lösblad. Använd nytt blad för varje uppgift.

För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara kortfattad, men tillräckligt utförlig och uppställd och formulerad så att tankegången lätt kan följas. Ett svar med t.ex. enbart värdet av en uträkning ger inte poäng. Numeriska värden kan anges som uttryck, lämpligt förenklade, där rotuttryck, logaritmer och exponentialuttryck kan ingå utöver *rena siffror*, om så behövs.

Namn:

Personnummer:

LYCKA TILL!

Del I: Digitala verktyg är inte tillåtna. Uppgifterna 1-5 kräver endast svar. Skriv ditt svar i svarsrutan under respektive uppgift. Uppgifterna 6-10 kräver fullständiga lösningar och skrivs på separat skrivpapper. När du är färdig med uppgifterna 1-10 lämnar du in Del I till skrivvakterna.

1. Skriv om potensen 5^x en potens med basen e .

(1/0)

Svar:

2. Ett föremål rör sig enligt $s(t) = 2t^2 + t - 1$, där s är sträckan i meter och t är tiden i sekunder. Efter hur lång tid rör sig föremålet med hastigheten 13 m/s? (2/0)

Svar:

3. Lös ekvationen $7 - |x - 2| = 4$.

(2/0)

Svar:

4. För en vinkel $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$ gäller att $\sin v = 0,85$ och $\cos v = 0,52$. Bestäm följande trigonometriska värden:

(a) $\sin(180^\circ - v)$

(1/0)

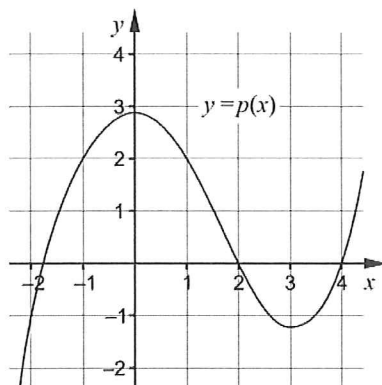
(b) $\cos(360^\circ - v) - \cos(180^\circ + v)$

(0/1)

a) Svar:

b) Svar:

5. Nedan ses grafen till $p(x)$ som är en polynomfunktion av grad 3.



Bestäm för vilka värden på x som

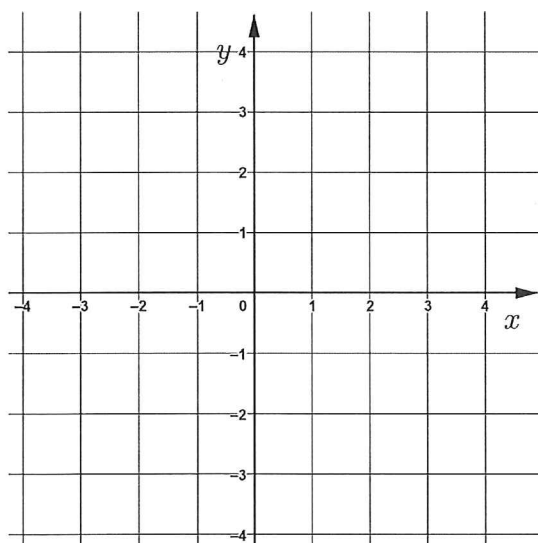
(a) $p'(x) < 0$? (1/0)

(b) uttrycket $\frac{p(x)}{p'(x)}$ inte är definierat. (0/1)

a) Svar:

b) Svar:

(c) Skissa grafen till $p'(x)$ i koordinatsystemet nedan. (0/1)



Uppgifterna 6-10 skall du lämna in lösningar till på separat skrivpapper.

6. Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 24x + 36}{2(x-3)^2} \quad (2/0)$$

7. Derivera följande funktioner

(a) $f(x) = x^{2024} - 10x^3 + 8x + 12$ (2/0)

(b) $g(x) = \frac{e^{2x} \cdot x^3 - 2\sqrt{x}}{x^3} + \pi$ (0/2)

8. Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x) = e^x + 2$ som uppfyller villkoret $F(0) = 5$. (2/0)

9. Beräkna $\int_1^2 3x^2 dx$. (2/0)

10. Lös ekvationen

$$\frac{x+2}{x-3} = x + \frac{5}{x-3} \quad (1/1)$$

**Del II: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat skrivpapper.
Du kan påbörja arbetet med dessa uppgifter utan räknare i väntan på att få lämna in Del I.**

11. Mängden $A(t)$ gram av ett radioaktivt ämne efter att det först uppmätts beskrivs av sambandet

$$A(t) = 120 \cdot 0.95^t + 10$$

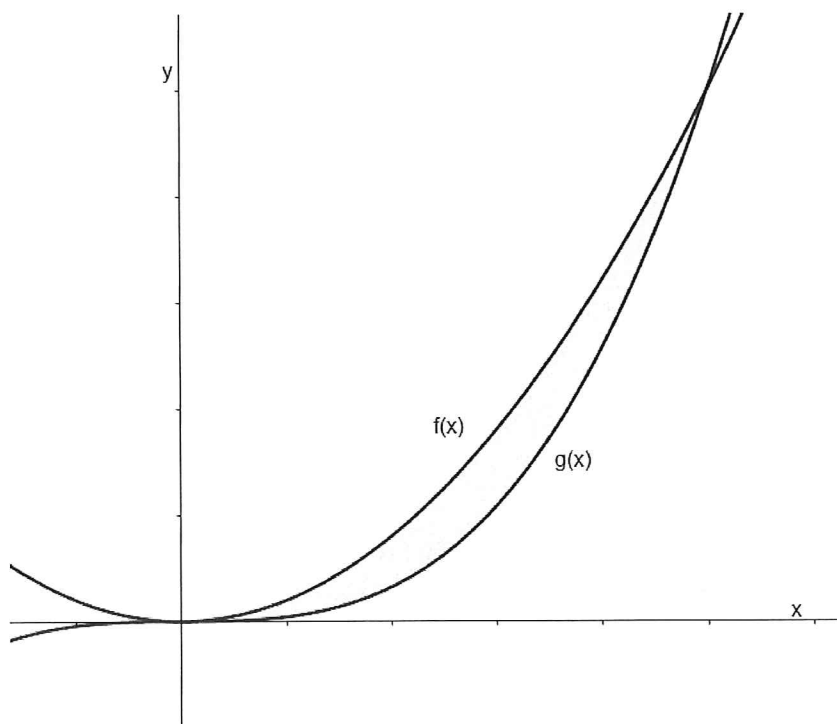
där $t \geq 0$ ges i dagar. Mängden av ämnet minskar när det sönderfaller.

- (a) Hur mycket av ämnet fanns det vid den första uppmätningen? (1/0)
- (b) Hur lång tid tar det tills mängden minskat till 30 gram? (2/0)
- (c) Hur snabbt minskar mängden efter 20 dagar? (0/1)
- (d) Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{2^t}$. (0/1)
12. I en triangel är sidan $AB = 9$ cm och sidan $AC = 7$ cm. Vinkeln mellan sidorna AB och AC är 32° .
- (a) Bestäm längden för sidan BC . (2/0)
- (b) Bestäm triangelns area. (2/0)
13. För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 2$. Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- eller terrasspunkter för funktionens graf.
Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/0)
14. Bestäm c värdet så att punkten $(2, 21)$ ligger på linjen som är en tangent till $f(x) = x^2 + 4cx - 3$ i punkten där $x = 0$. (0/2)

15. En ekonom har observerat att för en teater med 1000 platser så är alla 1000 platser bokade om biljetterna säljs för 200 kronor styck. Hon har dock noterat att för varje 10 kronor priset ökar på varje biljett så säljs 20 stycken färre biljetter. Utifrån denna information skapar hon följande matematiska modell för intäkterna:

Intäkterna är $R(p) = p \cdot q$ kronor, där $q = 1000 - 2(p - 200)$. Bestäm det optimala priset p kronor som kommer att maximera intäkterna. Vad är den maximala intäkten? (0/2)

16. Beräkna arean av det skuggade området mellan $g(x) = x^3$ och $f(x) = x^2$. (0/2)



Formelblad matematik 3

Algebra

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aritmetik

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Potenser

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^0 = 1$$

Geometrisk summa

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy$$

$$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

Absolutbelopp

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Funktioner och samband

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$k_1 \cdot k_2 = -1$, villkor för vinkelräta linjer

$ax + by + c = 0$, där inte både a och b är noll

Potensfunktioner

$$y = C \cdot x^a$$

Andragsgradsfunktioner

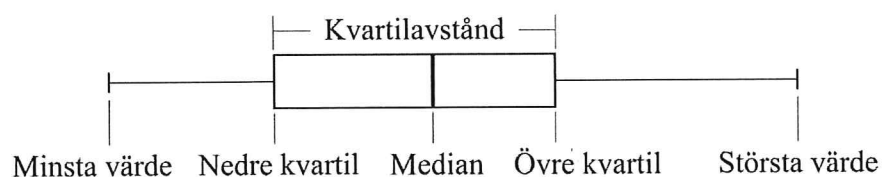
$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Exponentialfunktioner

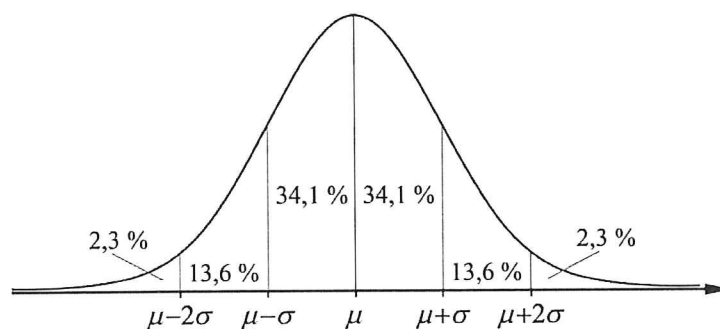
$$y = C \cdot a^x \quad a > 0 \text{ och } a \neq 1$$

Statistik och sannolikhet

Lådagram



Normalfördelning



Differential- och integralkalkyl

Derivatans definition $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
a^x ($a > 0$)	$a^x \ln a$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$

Integralkalkylens fundamentalsats

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{där } F'(x) = f(x)$$

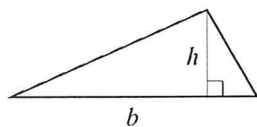
Primitiva funktioner

Funktion	Primitiva funktioner
k	$kx + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
a^x ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$

Geometri

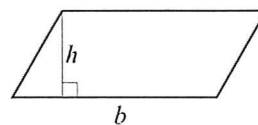
Triangel

$$A = \frac{bh}{2}$$



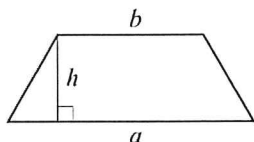
Parallelogram

$$A = bh$$



Parallelltrapets

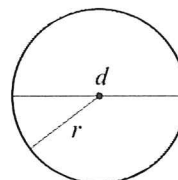
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Cirkel

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

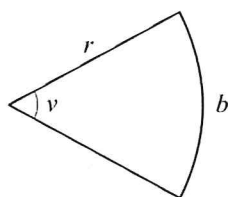
$$O = 2\pi r = \pi d$$



Cirkelsektor

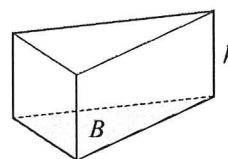
$$b = \frac{v}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$A = \frac{v}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



Prisma

$$V = Bh$$

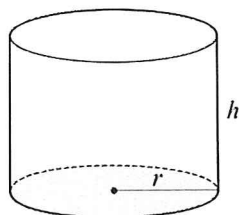


Cylinder

$$V = \pi r^2 h$$

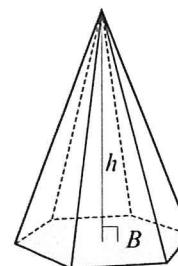
Mantelarea

$$A = 2\pi r h$$



Pyramid

$$V = \frac{Bh}{3}$$

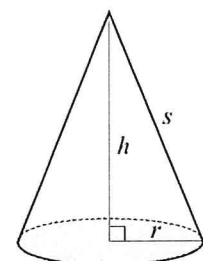


Kon

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Mantelarea

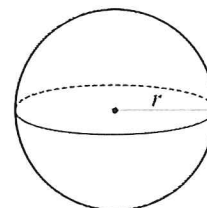
$$A = \pi r s$$



Klot

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

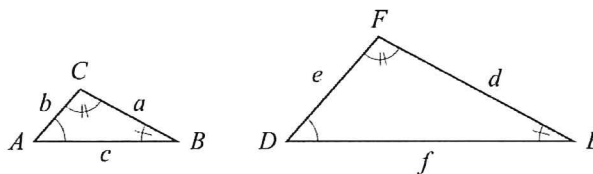
$$A = 4\pi r^2$$



Likformighet

Triangelarna ABC och DEF är likformiga

om $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$



Skala Areaskalan = (Längdskalan)²

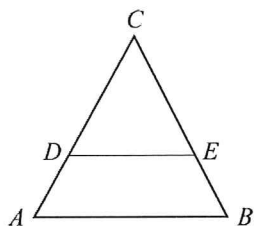
Volymskalan = (Längdskalan)³

Topptriangelsatsen

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC}$$

Transversalsatsen

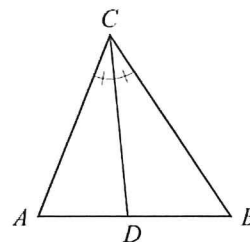
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



DE är parallell med AB

Bisektrissatsen

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



Vinklar

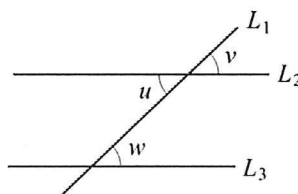
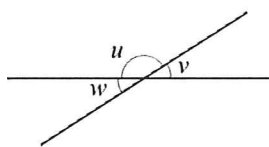
$u + v = 180^\circ$ Sidovinklar

$w = v$ Vertikalvinklar

L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

$v = w$ Likbelägna vinklar

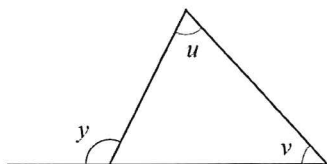
$u = w$ Alternatvinklar



Vinkelsumman S i en n -hörning: $S = (n-2) \cdot 180^\circ$

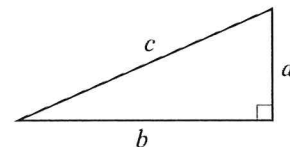
Yttervinkelsatsen

$y = u + v$



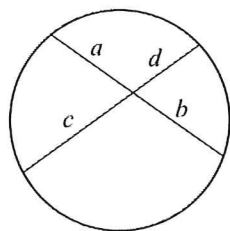
Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$



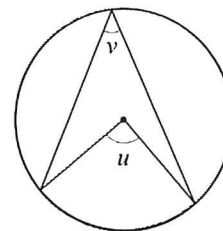
Kordasatsen

$ab = cd$



Randvinkelsatsen

$u = 2v$



Avståndsformeln

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

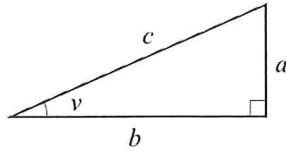
Mittpunktsformeln

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ och } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Trigonometri

Definitioner

Rätvinklig triangel

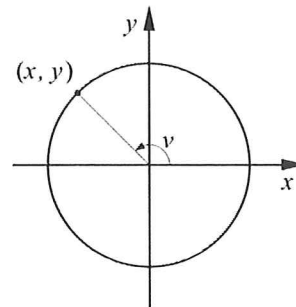


$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$

Enhetscirkel



$$\sin v = y$$

$$\cos v = x$$

$$\tan v = \frac{y}{x}$$

Sinussatsen

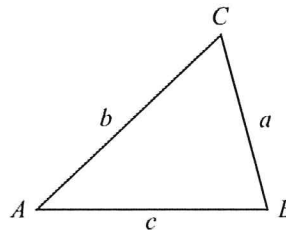
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Areasatsen

$$T = \frac{ab \sin C}{2}$$



Trigonometriska funktionsvärden

Vinkel v	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0