HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: **Matematik för ingenjörer III G1F, 3 hp**

Examinationsmoment: 1001 – Salstentamen

Kurskod: **MA301G** Högskolepoäng för examinationsmomentet: 2

Datum: **2024-08-23** Tentamenstid 14:30 – 18:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Berörda lärare: Stefan Karlsson, Konstantinos Tsougkas

Hjälpmedel/bilagor: Inga hjälpmedel utöver skrivdon. Formelblad bifogas.

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser, se nästa sida

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 5

Kurs: **MA301G Matematik för ingenjörer III**

Tentamensdag: **2024-08-23** kl 14:30–18:30

Hjälpmedel : Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad. Ej räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen.
Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.
Med ett *analytiskt uttryck* menar vi ett uttryck som använder de fyra räknesätten, potenser, kvadratrötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, t.ex. $x^2e^{-x^3} + \ln \frac{\cos x}{x}$. Numeriska värden kan, om inget annat sägs, anges som förenklade analytiska uttryck där faktorer som π och e kan ingå utöver "rena siffror", t.ex. $\frac{7}{2} + 5e^3 \sin(\pi/7)$.
Sista sidan består av en formelsamling med bland annat derivator och primitiva funktioner (obestämda integraler) till några standardfunktioner.

Följande kursmål bedöms på denna tentamen

1. arbeta algebraiskt med derivator, inkluderat att förstå principen för och praktiskt använda kedjeregel, produktregel, kvotregel samt utnyttja implicit derivering i ekvationer,
2. visa förståelse för betydelsen av en ordinär differentialekvation och kunna formulera problem som differentialekvationer i några grundläggande fall,
3. visa grundläggande förståelse för integralbegreppet och använda integralkalkylens huvudsats,
4. identifiera separabla differentialekvationer och explicit lösa dem i enklare fall,
5. kommunicera matematiska resonemang och beräkningar på ett tydligt och förståeligt sätt.

Punkt 5 bedöms på tentamen som helhet, i övrigt utifrån numrerade avdelningar.

Betygskriterier: *För godkänt betyg* krävs att studenten i tentamen har visat måluppfyllelse på ett nöjaktigt sätt. I detta ingår att använda och förklara principer relaterade till kursmålen på ett i övervägande felfritt och begripligt sätt, kunna lösa problem relaterade till kursmålen av rimlig svårighets- och komplexitetsgrad med viss säkerhet och utan större fel, och kommunicera matematiska resonemang och beräkningar på ett tillräckligt tydligt och förståeligt sätt enligt vedertagna former.
För väl godkänt betyg skall studenten visa god förståelse av principer, stor säkerhet och endast smärre fel vid användandet av dem och vid problemlösning, kunna ta sig an problem av större komplexitet, och kommunicera med god tydlighet och stil.
Kvantitivt bedöms var och en av de fyra avdelningarna med upp till 6 poäng. För godkänt betyg krävs minst 2 poäng per avdelning och totalt minst 12 poäng, för väl godkänt minst 18 poäng.

1. (a) För $f(x) = \sin(ax) \cdot e^{bx^2}$ där a och b är konstanter, bestäm ett analytiskt uttryck för dess derivata $f'(x)$.

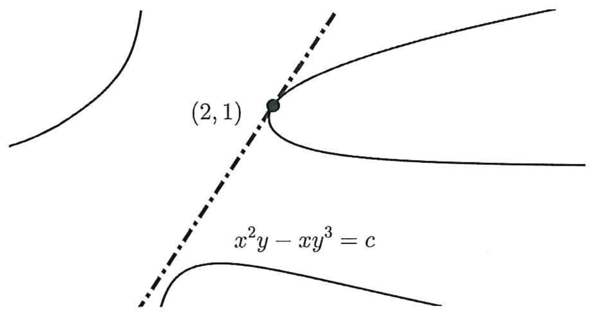
   (b) En kurva i xy-planet ges av ekvationen

$$x^2y - xy^3 = c,$$

   där c är en konstant.

   (i) Bestäm genom implicit derivering ett uttryck i x och y för $\frac{dy}{dx}$ när (x, y) följer kurvan.

   (ii) För något värde på c (vilket?) ligger punkten $(x, y) = (2, 1)$ på kurvan. Bestäm en ekvation för den linje som tangerar kurvan i denna punkt.



2. (a) Har differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -3y(y-2)(y+2)$$

   några lösningar där y är *konstant* som funktion av t, och vilka är de i så fall?

   (b) Om $y = f(t)$ är en lösning till ovanstående differentialekvation med begynnelsevärdet $f(0) = y_0 = 1$, är då f en växande eller avtagande funktion kring $t = 0$? Varför?

   (c) Skissa lösningskurvor för respektive begynnelsevärde y_0 för y då $t = 0$: $y_0 = -3$, $y_0 = -1$, $y_0 = 1$, $y_0 = 3$.

(fortsätter nästa sida)

3. (a) Ett föremål rör sig under 2 sekunder i en riktning med hastigheten

$$v = 12(8x - x^3) \text{ m/s}$$

där x är antalet sekunder sedan starten. Hur långt förflyttar sig föremålet under dessa två sekunder?

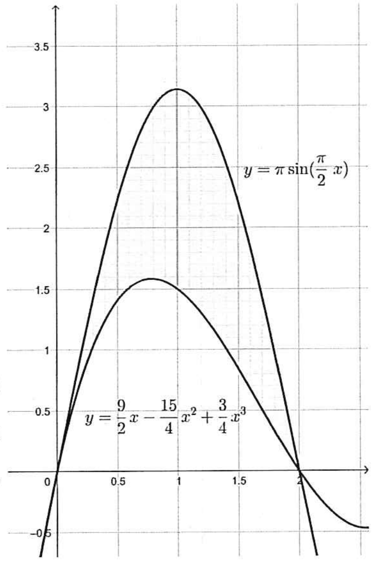
(b) Notera att de två kurvorna

$$y = \frac{9}{2}x - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^3$$

och

$$y = \pi \sin(\frac{\pi}{2}\, x).$$

skär varann i punkterna $(0, 0)$ och $(2, 0)$. Bestäm genom integration arean för området mellan kurvorna mellan dessa skärningspunkter, i xy-koordinatsystemets areaenheter.



4. (a) Bestäm en lösning $y = g(x)$ till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}x,$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y_0 = g(0) = 0$.

(b) Bestäm en lösning $y = f(x)$ $(y > 0)$ till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^3}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y_0 = f(0) = 2$.

Vid behov, se bifogat formelblad för relevanta primitiva funktioner.

Lycka till! /SK&KT

Formelsamling för matematisk analys

Trigonometriska identiteter

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right) \qquad \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \tfrac{1+\cos\alpha}{2} \qquad \sin^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \tfrac{1-\cos\alpha}{2}$$

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \text{ om } a > 1 \qquad \lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0 \text{ om } q > 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0 \text{ om } q > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^p(\ln x)^q = 0 \text{ om } p > 0 \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!} = 0 \text{ för heltal } m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ om } a > 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ om $a \neq -1$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$x\ln\lvert x\rvert - x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x\ln a$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln\left\lvert x + \sqrt{a+x^2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x + C$

Derivering och integrering

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \qquad \frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx, \qquad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$