HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2026-02-24

Skrivtid: 14.15 – 19.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys* samt *Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

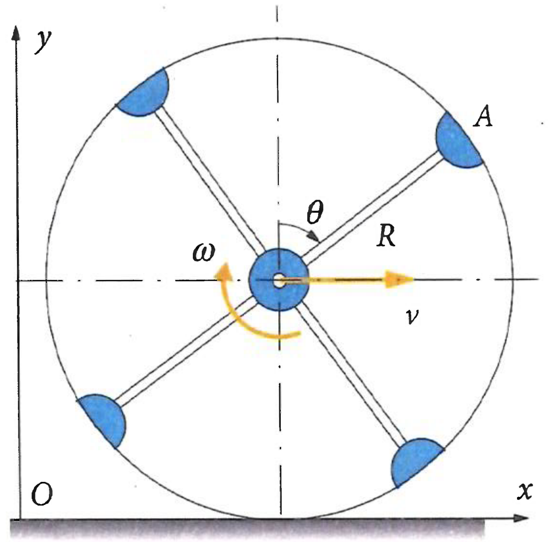
1 Basuppgift – kursmål 1

Ett hjul med radien R rullar med hastigheten v på ett horisontalplan. Hjulets massa är som figuren visar koncentrerad till fem partiklar fästa vid periferin och mittpunkten. Partiklarna har vardera massan m.

Bestäm

a) Hastigheten för partikel A relativt tyngdpunkten samt relativt det fixa systemet på marken då $\theta = 90$ grader.
b) Systemets rörelsemängd till storlek och riktning.
c) Systemets rörelsemängdsmoment till storlek och riktning med avseende på punkt O.

Ditt Svar får innehålla m, R och v.



2 Basuppgift – kursmål 2

Ett hjul har radien R och rullar initialt på ett horisontellt underlag med den konstanta vinkelhastigheten ω_0 men möter efter ett tag ett strävt plan med lutningsvinkel θ. Hjulet rullar uppför det lutande planet och stannar efter en sträcka L. Hjulets massa M är koncentrerad till periferin.

a) Frilägg hjulet när det befinner sig på det lutande planet och rita ut alla krafterna som verkar på hjulet. Förklara dina införda beteckningar. Motivera speciellt Din riktning på friktionskraften.

b) Ställ upp Newtons andra lag för tyngdpunkten (TP) när hjulet rullar uppför planet.

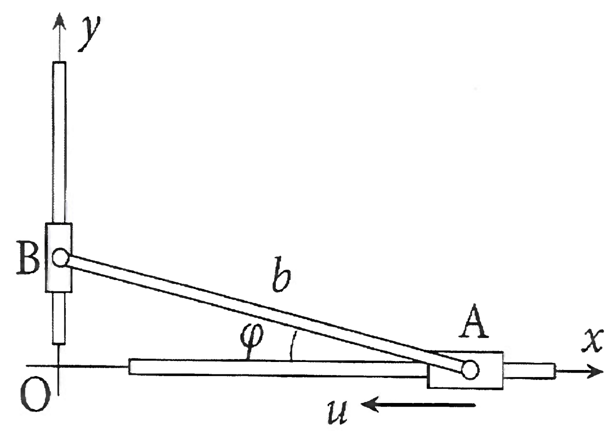
c) Bestäm hjulets totala rörelsemängd till storlek och riktning när det rullar på det horisontella underlaget innan planet.

d) Bestäm med hjälp av energilagen sträckan L.

3 Basuppgift – kursmål 3

Ändarna hos en homogen stång med längden *b* kan endast röra sig längs två vinkelräta riktningar enligt figuren nedan. Då vinkeln ψ är 30 grader har ändpunkten A hastigheten *u* åt vänster (se figur).
Bestäm för detta ögonblick:

a) Koordinaterna för stångens momentancentrum (MC).
b) Stångens vinkelhastighet. Ange om rotationen sker medurs eller moturs.
c) Hastighetsvektorn för ändpunkten B med hjälp av sambandsformeln för hastighet. Du skall alltså använda vektorer i dina beräkningar.

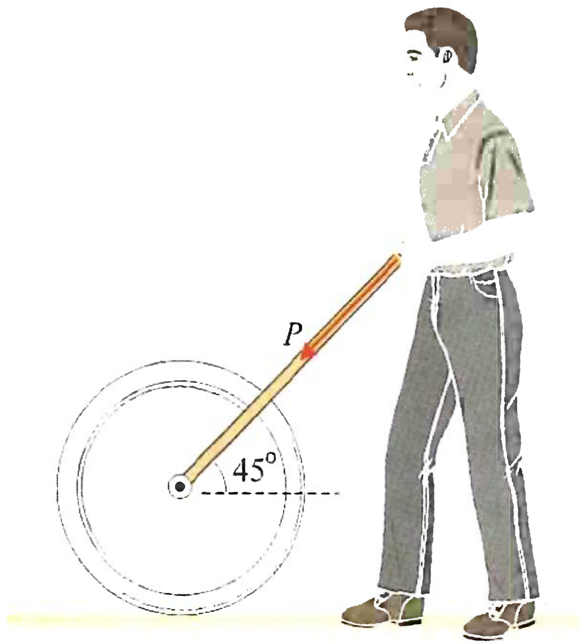


4

Basuppgift – kursmål 4

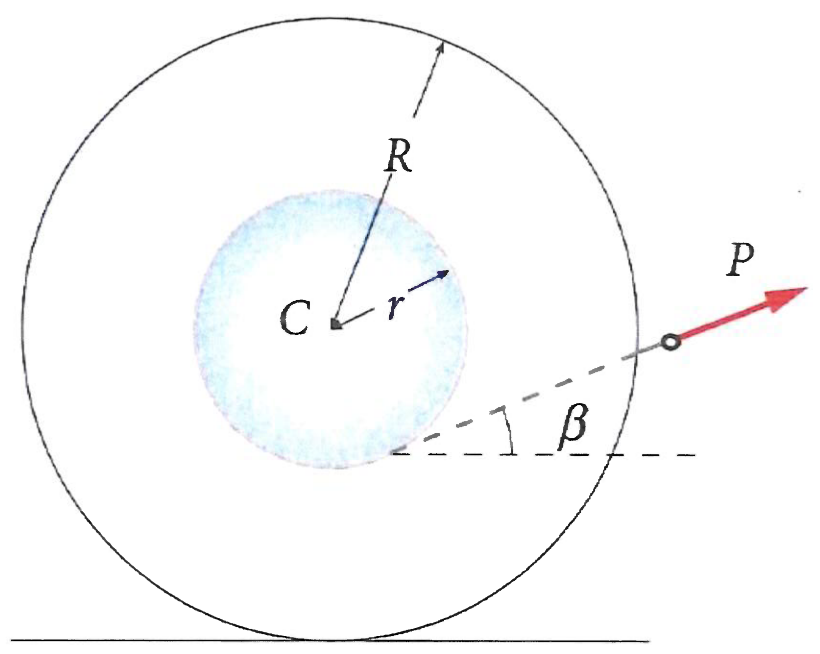
Betrakta mannen i figuren som börjar rulla en cylinder (cylindervals) med massan *M* och radien *R* genom att trycka på det mycket lätta handtaget med kraften *P*.
Cylindervalsen är från början i vila. Vinkeln 45 grader i figuren är relativt det horisontella underlaget.

a) Ställ upp Newtons andra lag för cylindervalsen (dess tyngdpunkt *TP*). Förklara dina införda beteckningar. Välj att lämpligt koordinatsystem.
b) Ställ upp momentekvationen för cylindervalsen med avseende på *TP*. Förklara dina införda beteckningar.
c) Bestäm det minsta värdet på friktionskoefficienten μ så att cylindervalsen rullar utan att glida för alla värden på kraften *P*.



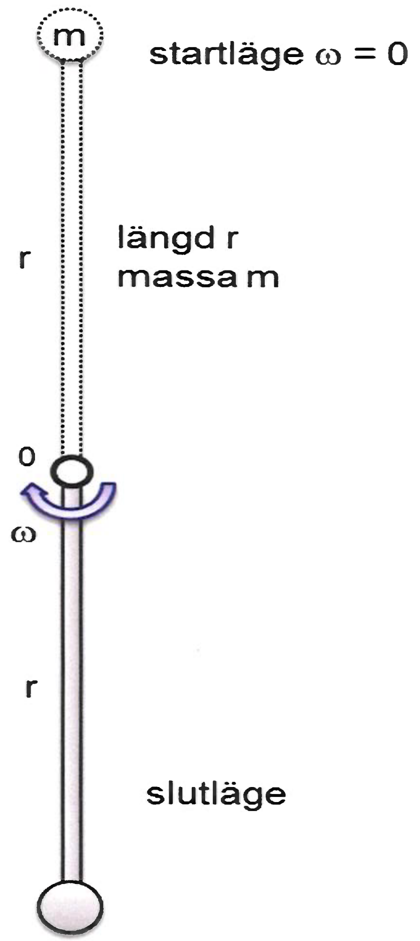
5

En trådrulle med massan m består av två likadana cylindrar med radien R stelt förenade med en <u>mycket</u> lätt cylinder med radien r på vilken tråden är lindad. Man drar i tråden med en konstant kraft P enligt figuren. Trådrullen ligger på ett strävt bord.
Bestäm trådrullens accelerationsvektor.



6

En stång längd *r* och massan *m* har en punktpartikel, också den med massan *m,* fastsatt längst ut på stången. Systemet är friktionsfritt lagrat i axeln O och släpps från vila (startläge) enligt figuren. Rörelsen sker i vertikalplanet.
Beräkna lagerkraften i 0 då systemet har roterat ett halvt varv (slutläge).



Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{s}\,\hat{\mathbf{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_t = R\omega\,\hat{\mathbf{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = R\omega\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathbf{a} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{e}}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = R\dot{\omega}\,\hat{\mathbf{e}}_t + R\omega^2\,\hat{\mathbf{e}}_n = R\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_t + R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\dfrac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{e}}_r + R\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Impulslagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Impulsmomentlagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $\displaystyle W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $\displaystyle W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{p}}$

Kinetisk energi: $T = \dfrac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten *TP*: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p *O*: $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt *O*: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m\mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt *O*: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p *TP*: $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p *TP*: $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP}\omega\, \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p *TP*: $\mathbf{M}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}I_{TP}\omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom *O*: $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom *O*: $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = r\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

Formelsamling för matematisk analys

Trigonometriska identiteter

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ $\qquad$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\qquad$ $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Standardgränsvärden

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad$ $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0$ om $a > 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0$ om $q > 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0$ om $q > 0$

$\lim_{x\to 0^+} x^p(\ln x)^q = 0$ om $p > 0$ $\qquad$ $\lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!} = 0$ för heltal m

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ om $a > 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ om $a \neq -1$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$x\ln\lvert x\rvert - x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x\ln a$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln\left\lvert x + \sqrt{a+x^2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x + C$

Derivering och integrering

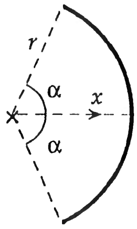
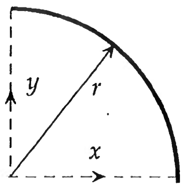
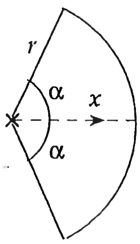
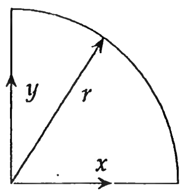
$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $\qquad$ $\frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $\qquad$ $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx$, $\qquad$ $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

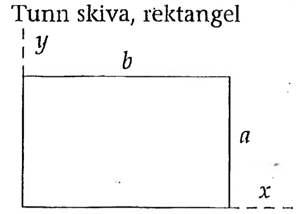
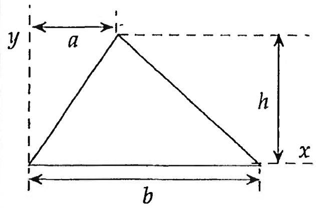
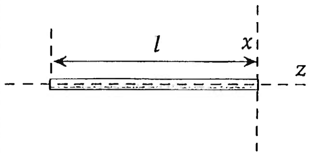
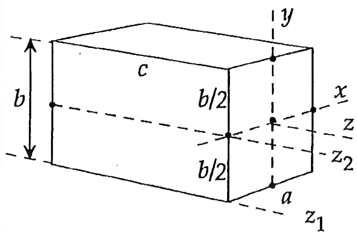
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

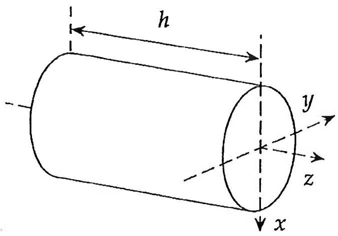
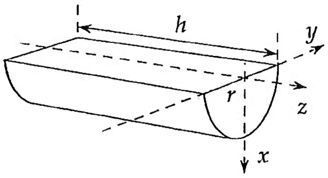
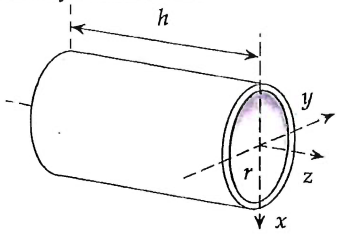
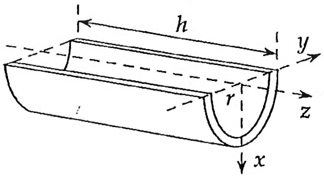
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

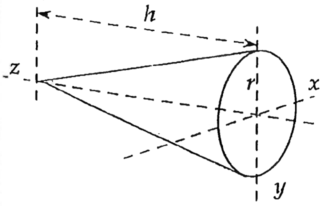
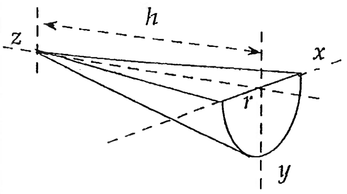
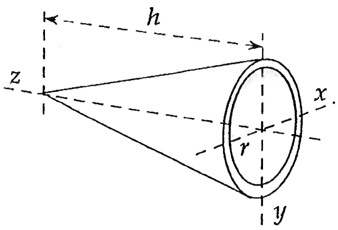
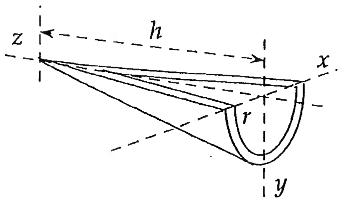
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn skiva, rektangel 		$I_x = \frac{1}{3} m a^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12} m a^2$
Tunn skiva, triangel 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6} m h^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18} m h^2$
Smal rak stång 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3} m l^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12} m l^2$
Rätblock 		$I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2$

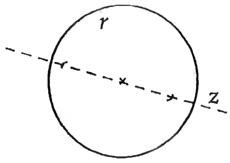
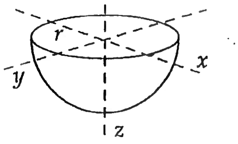
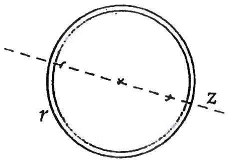
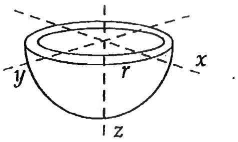
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon  	$\bar{z}=\frac{h}{4}$	$I_z=\frac{3}{10}mr^2$ $I_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x=\bar{I}_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon  	$\bar{z}=\frac{h}{4}$ $\bar{y}=\frac{r}{\pi}$	$I_z=\frac{3}{10}mr^2$ $I_x=I_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x=\left(\frac{3}{20}-\frac{1}{\pi^2}\right)mr^2+\frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal  	$\bar{z}=\frac{h}{3}$	$I_z=\frac{1}{2}mr^2$ $I_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x=\bar{I}_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal  	$\bar{z}=\frac{h}{3}$ $\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$	$I_z=\frac{1}{2}mr^2$ $I_x=I_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x=\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2+\frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320}mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12}mr^2$