MA303G Linjär algebra II

Tentamensdag: **2023-11-17** kl 8.30-12.30
Hjälpmedel : Inga hjälpmedel utöver högskolans räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål. Varje avdelning kan ge upp till 6 poäng, för godkänt betyg krävs minst 20 poäng på 1–5, för väl godkänt betyg minst 30 poäng totalt.
Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. *(Bas och basbyte)*

   Låt $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, där $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   och $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, där $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (a) Avgör om B är en bas för $\mathbb{R}^3$. Om B är en bas, bestäm koordinaterna med avseende på B för vektorn $\mathbf{v}$, i annat fall motivera varför B inte är en bas.

   (b) Avgör om C är en bas för $\mathbb{R}^3$. Om C är en bas, bestäm koordinaterna med avseende på C för vektorn $\mathbf{v}$, i annat fall motivera varför C inte är en bas.

2. *(Bas och linjär avbildning i olika baser)*

   Låt $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en ON-bas för vektorrummet $\mathbb{R}^2$ och $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara en ON-bas för rummet R^3. Definiera en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ med

   $$T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3, \qquad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2 \qquad \textit{(obs. index)}$$

   (a) Bestäm bilden $T(\mathbf{v})$ för för vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_E$.

   (b) Bestäm matrisen $\left(T\right)_F^E$ för avbildningen T med avseende på baserna E och F.

   (c) Bestäm matrisen $\left(T\right)_H^G$ för avbildningen T med avseende på baserna

   $$G = (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \quad \textit{och} \quad H = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3, 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3).$$

   (Observera att G utgör en bas för rummet $\mathbb{R}^2$ och H utgör en bas för rummet $\mathbb{R}^3$.)

3. *(Determinant)*

   (a) Låt A och B bara två $n \times n$-matriser i vilka $\det(A) = -2$ och $\det(B) = 3$. Beräkna, om det går, determinanten $\det(AB)$, $\det(A^4)$ och $\det(B^{-1}A^t)$. Motivera i annat fall varför den inte går att beräkna determinanten.

(b) Bestäm värdet på a sådant att determinanten för matrisen M är lika med noll.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *(Egenvärden och egenvektorer)* Given matrisen

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestäm

(a) alla egenvärden till matrisen A.

(b) karakteristiska ekvationen för matrisen A.

(c) egenvektorerna till matrisen A med tillhörande egenvärden.

5. *(Egenvärden, egenvektorer och diagonalisering)*

Matrisen

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

har tre egenvektorer. En av dessa är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vilket egenvärde tillhör egenvektorn $\mathbf{v}_1$?

(b) Bestäm matrisens övriga egenvärden (hur många egenvärden har den?) och respektive egenvektorer (egenrum).

(c) Bestäm, om möjligt, en diagonal matris D och en inverterbar matris P sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

6. *Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.*

Utgå från uppgift 1, fallet där de angivna vektorerna bildar en bas, kalla denna bas $D = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ (allltså $D = B$ eller $D = C$) . Låt $E = ([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1])$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Antag att

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

är en linjär avbildning sådan att

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}_1) = \mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{d}_2) = 2\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{d}_3) = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_3.$$

(a) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{T}\right)_D^E$ för $\mathbf{T}$ från E-koordinater (för $\mathbf{v}$) till D-koordinater (för $\mathbf{T}(\mathbf{v})$).

(b) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{T}\right)_E^D$ för $\mathbf{T}$ från D-koordinater till E-koordinater.

(c) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{T}\right)_E^E$ för $\mathbf{T}$ från E-koordinater till E-koordinater.

7. *Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.*

Låt

$$\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

linjära avbildningen defineras som ortogonal projektionen genom planet $\pi : 2x - y + 2z = 0$. Avbildningsmatrisen ges av

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm $P(\mathbf{v})$ där $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Den karakteristika ekvationen för P är $-\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$. Vad har P för egenvektorer? Beskriv dem gärna genom att ange en bas för respektive egenrum.

(c) Bilda en bas B för $\mathbb{R}^3$ från egenvektorerna. Bestäm sedan avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{P}\right)_B^B$ för $\mathbf{P}$ med avseende på denna bas.

Notation för koordinater och matriser för avbildningar.

Standardbas för $\mathbb{R}^n$. Med *standardbasen* för $\mathbb{R}^n$ menar vi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ där $\mathbf{e}_k$ har 1 som k:te komponent, och 0 som övriga komponenter.

Koordinatvektor för en vektor med avseende på en bas. Om $F = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ är en bas för ett vektorrum V så betecknar $(\mathbf{v})_F$ koordinatvektorn (en vektor i $\mathbb{R}^n$ som en $n \times 1$-matris) för $\mathbf{v}$ med avseende på basen F, dvs $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} (\mathbf{v})_F = \mathbf{v}$. (I Lemurell skrivs koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ som $\mathbf{v}_B$, i Andersson V_B.)

Matris för linjär avbildning. Om $T : V \to W$ är en linjär avbildning, B en bas för vektorrummet V och C en bas för vektorrummet W, så betecknar $(T)_C^B$ matrisen för avbildningen T, dvs

$$(T(\mathbf{v}))_C = (T)_C^B (\mathbf{v})_B.$$

Om $V = W$ och $B = C$ kan vi kortare skriva $(T)_B$ för $(T)_B^B$.
(I Lemurell skrivs en avbildningsmatris (där $B = C$) T_B, i Andersson $A_{B,C}$, där sammanhanget ger vilken avbildning matrisen gäller.)

Basbytesmatris. En basbytesmatris från B-koordinater till C-koordinater (B och C baser för samma rum) kan skrivas $(B)_C$, $(\mathrm{id})_C^B$, $A_{C \leftarrow B}$ eller $A_{B \to C}$.
(I Lemurell används det senare, i Andersson betecknas basbytesmatriser oftast med P där sammanhanget ger mellan vilka baser den byter koordinater.)

Determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} A_{1,2} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n} A_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

där $A_{i,j}$ är matrisen som fås från A genom att stryka rad i och kolonn j.

Diagonalisering

Om kolonnerna i P är egenvektorer till A så är

$$AP = PD$$

där D är en diagonalmatris.

Lycka till! /YA