

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra - geometriska transformationer G1N, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA304G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2025-11-20

Skrivtid: 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor : Miniräknare (av enklare slag). Formelblad bifogas.

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)
Poänggränser G: 24 av 36, VG: 30 av 36

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 4

MA304G Linjär algebra - geometriska transformeringar

Tentamensdag: 2025-11-20

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad och miniräknare av enklare slag.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

Om inte annat anges i en uppgift, så antas alla koordinater vara angivna med avseende på en ON-bas.

1. (a) Vad är värdet av skalärprodukten $(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ givet att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ två vektorer sådana att $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 4$ och $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2$?
- (b) Vi vill dela upp en vektor $\mathbf{v}$ i två ortogonala komponenter $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ är parallell med en given vektor $\mathbf{d}$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{d}$. Om

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

- (c) Bestäm koordinaterna för en vektor som är ortogonal mot planet som innehåller punkterna $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 2, 2)$ och $C = (1, 2, 1)$.

2. Antag att

$$AX = BX + C \tag{1}$$

där A och B är kvadratiske matriser och C och X av kompatibla typer.

- (a) Vad finns det för villkor på matriserna för att X ska vara entydigt bestämd av ekvation (1), och vad blir då X uttryckt i de övriga matriserna?

- (b) Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, beräkna X .

3. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Går det att hitta lösningar till följande ekvationssystem (dvs bestämma koefficienterna i linjärkombinationerna)? Bestäm i så fall den allmänna lösningen (alla möjliga lösningar).

- (a) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_1$
- (b) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_1$
- (c) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_2$

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna matrisinversen A^{-1} , om A är inverterbar, annars visa att A inte är inverterbar.

(b) Om $AX = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, är då matrisen X entydigt bestämd? Beräkna i så fall X .

4. En affin avbildning F på rummet av punkter i 3D med ett fixt ON-koordinatsystem skapas på följande vis: Roter först 90° i positiv riktning kring x -axeln, translatera sedan med vektorn

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ och spegla slutligen i xz -planet.

(a) Bestäm en 4×4 -matris som för homogena koordinater (som kolonnmatris) beskriver avbildningen F .

(b) Vad är koordinaterna (beroende på d_x, d_y, d_z) för den punkt som punkten med koordinater (x, y, z) avbildas på, dvs $F(x, y, z)$?

(c) Vad ska translationsvektorn $\mathbf{d}$ vara för att punkten $(1, 1, 1)$ ska avbildas på origo, dvs $F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$?

5. Färgingenjör Kalle Kulör tillverkar och säljer i sin firma *Ing. K. Kulörs prima färg* målarfärg av högsta kvalitet i tre olika kulörer: röd, grön och blå.

Han säljer färgen för olika pris, 300 kr per liter för röd, och 200 kronor per liter för både grön och blå. Kostnaden för råvaror etc är olika, så förtjänsten blir varierande på annat sätt. Röd färg ger en förtjänst på 50 kr per liter, grön färg 60 kronor per liter och blå färg 80 kronor per liter.

En dag sålde *Ing. K. Kulörs prima färg* totalt 100 liter färg för totalt 25 000 kr och en förtjänst på 5 900.

Hur mycket sålde Kalle denna dag av varje kulör?

Tips: Beteckna antalet liter av varje färg som x_R, x_G, x_B .

Lycka till! /SK

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_v = \text{proj}_v \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \pm \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \pm \text{Arean av den parallelogram som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$