

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra I G1F, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA302G

Högskolepoäng för tentamen: 2p

Datum: 2025-10-23

Skrivtid: 8:15 – 12:30

Ansvarig lärare: Yohannes Aklilu

Hjälpmedel/bilagor : Studentens miniräknare, Högskolans miniräknare, formelblad bifogas

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: 2025-10-23 kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Högskolans eller studentens Räknedosor.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1–6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 28 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Given linjen

$$L : \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 4t \end{cases}.$$

- i. Beräkna vinkeln mellan linjen L och planet $\pi : 2x - 3y + z = 2$. Ange svaret i grader.
- ii. Bestäm ekvationen för planet som är parallell med linjen L och innehåller punkterna $P(1, 1, -1)$ och $Q(3, 4, -1)$.

- (b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är 37° . Bestäm normen (dvs. längden) av vektorprodukten

$$(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}).$$

2. (a) Antag att A , B och X är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$B(A^{-1} - XA^t) = B^t.$$

Lös algebraiskt ut X ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen X om

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestäm alla vektorer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i rummet $\mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen:

$$\mathbf{u} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) För vilket/vilka värden på k (om det finns) kommer ekvationssystemet ha *exakt en* lösning? Motivera ditt svar.

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 0, \\ 2x + 3y + kz = 4, \\ kx + y + 2z = -2k, \end{cases}$$

4. Given vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i planet $\mathbb{R}^2$.

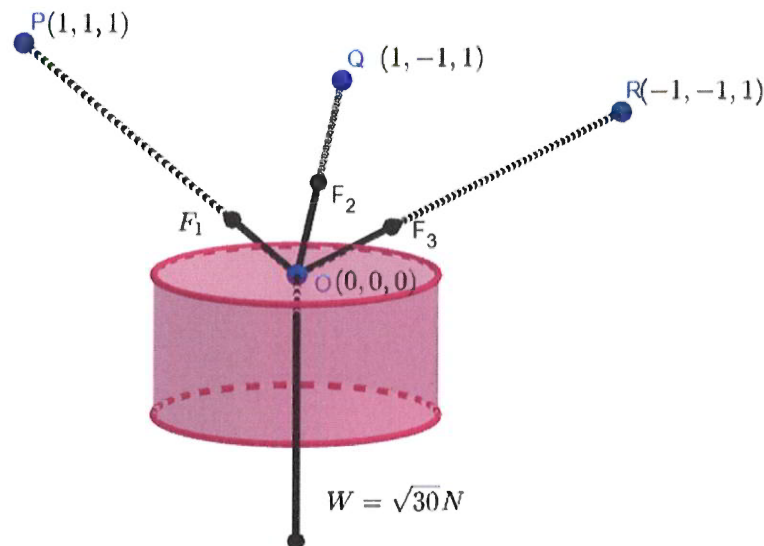
- (a) Bestäm en ortonormalbasis (ON-bas) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för $\mathbb{R}^2$ som uppfyller följande villkor.

- $\mathbf{e}_1$ är parallell med $\mathbf{v}$.
- $\mathbf{e}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

- (b) Bestäm om det finns något värde på c så att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjär beroende:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ c \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ c-3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Ett $\sqrt{30}\text{N}$ cylindriskt objekt hängdes upp med hjälp av tre viktlösa trådar i ett tredimensionellt koordinatsystem enligt figuren nedan. Tre krafter F_1, F_2 och F_3 verkar längs trådarna så att objektet befinner sig i jämvikt.



Figur 1: Frilagd objekt. Koordinaterna för punkterna $O(0,0,0)$, $P(1,1,1)$, $Q(1,-1,1)$, och $R(-1,-1,1)$ är given.

- (a) Sätt upp ett ekvationssystem med hjälp av jämvikekvationer för krafternas storlek som verkar på objektet.
- (b) Bestäm krafternas storlek.

6. Given matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisinversen, eller motivera varför den inte existerar.

(b) Om $AX = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, är då matrisen entydigt bestämd? Beräkna i så fall X .

Lycka till! /YA

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \text{Areal av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$