

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra I G1F, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA302G

Högskolepoäng för tentamen: 2p

Datum: 2025-12-05

Skrivtid: 8:15 – 12:30

Ansvarig lärare: Yohannes Aklilu

Hjälpmedel/bilagor : Studentens miniräknare, Högskolans miniräknare, formelblad bifogas

Övrigt

- | | | |
|-------------|-------------------------------------|---|
| Anvisningar | ☐ | Ta nytt blad för varje lärare |
| | ☒ | Ta nytt blad för varje ny fråga |
| | ☒ | Skriv endast på en sida av papperet. |
| | ☒ | Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad. |
| | ☒ | Numrera lösbladen löpande. |
| | ☒ | Använd inte röd penna. |
| | ☒ | Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta. |

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: **2025-12-05** kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Högskolans eller studentens Räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1–6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 28 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Given punkterna $A(2, -1, 3)$ och $B(1, -1, 2)$, och planet $\pi : \begin{cases} x = 2 - s + 2t \\ y = 1 - 2s + t, \\ z = 1 + s, \end{cases}$.
- Bestäm planets normalvektor.
 - Linjen genom punkterna A och B skär planet π . Bestäm koordinaterna för skärningspunkten.
- (b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är 37° . Bestäm skalärprodukten
- $$(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet (3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}).$$

2. (a) Antag att A , B och X är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$(XA + B)B^{-1} = A^t.$$

Lös algebraiskt ut X ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen X om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Lös följande linjär ekvationssystemet med en valfri lösningsmetod.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14, \\ x + 2y - z = 3, \\ x + y - 2z = 3, \end{cases}$$

- (b) För vilket/vilka värden på k (om det finns) kommer ekvationssystemet *sakna* lösning? Motivera ditt svar.

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 0, \\ 2x + 3y + kz = 4, \\ kx + y + 2z = -2k, \end{cases}$$

4. (a) Given vektorer (uttryckt i ON-koordinater)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dela upp vektorn $\mathbf{v}$ i två komponenter,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

där

- $\mathbf{v}_1$ är ortogonal mot vektorn $\mathbf{a}$, och
- $\mathbf{v}_2$ är parallell med $\mathbf{a}$.

- (b) Avgör om följande mängder av vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende i respektive vektorrum. Motivera ditt svar.

• Vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Vektorer i $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Vektorer i $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

• Vektorer i $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Ett bageri tillverkar tre slags tårter genom att på olika sätt kombinera tre ingredienser enligt följande recept:

	ingr. 1	ingr. 2	ingr. 3
Tårta 1	8	10	4
Tårta 2	16	5	0
Tårta 3	4	5	12

Sista dagen innan semestern har bageriet 416 enheter av ingrediens 1 kvar, tillsammans med 250 av ingrediens 2 och 144 av ingrediens 3.

- (a) Sätt upp ett ekvationssystem för antalet tårter av varje slag skall man tillverka.
 (b) Hur många tårter av varje slag skall man i så fall tillverka?

6. Given matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm matrisinversen, eller motivera varför den inte existerar.

- (b) Om $XA = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, är då matrisen entydigt bestämd? Beräkna i så fall X .

Lycka till! /YA

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \text{Areal av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$