HÖGSKOLAN I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra II G1F, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA303G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2024-11-22

Skrivtid: 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor : Högskolans miniräknare

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☐ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 5

MA303G Linjär algebra II

Tentamensdag: **2024-11-22** kl 8.30-12.30
Hjälpmedel : Inga hjälpmedel utöver högskolans räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål. Varje avdelning kan ge upp till 6 poäng, för godkänt betyg krävs minst 20 poäng på 1–5, för väl godkänt betyg minst 30 poäng totalt.
Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. *(Bas och basbyte)*

   Låt $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, där $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   och $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, där $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (Alla dessa vektorer är uttryckta i koordinater med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$.)

   (a) Avgör om B är en bas för $\mathbb{R}^3$. Om B är en bas, bestäm koordinaterna med avseende på B för vektorn $\mathbf{v}$, i annat fall motivera varför B inte är en bas.

   (b) Avgör om C är en bas för $\mathbb{R}^3$. Om C är en bas, bestäm koordinaterna med avseende på C för vektorn $\mathbf{v}$, i annat fall motivera varför C inte är en bas.

2. *(Bas och linjär avbildning i olika baser)*

   Låt $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. vara en ON-bas för planet och $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ där

   $$\mathbf{f}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

   en annan bas.

   Låt $\mathbf{T}$ vara en linjär avbildning sådan att

   $$\mathbf{T}(\mathbf{f}_1) = -\mathbf{f}_1, \qquad \mathbf{T}(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2.$$

   (a) Bestäm koordinatvektorerna $(\mathbf{e}_1)_F$ och $(\mathbf{e}_2)_F$ för $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ med avseende på basen F.

   (b) Ange matrisen $(\mathbf{T})_F^F$ för avbildningen $\mathbf{T}$ med avseende på basen F (dvs med F-koordinater för både $\mathbf{x}$ och $\mathbf{T}(\mathbf{x})$).

   (c) Bestäm matrisen $(\mathbf{T})_E^E$ för avbildningen $\mathbf{T}$ med avseende på basen E.

3. *(Determinant)*

(a) Anta att A och B är två kvadratiska matriser där

$$\det A = 2 \quad \text{och} \quad \det B = -1.$$

Bestäm följande värden, om möjligt, annars motivera varför informationen inte räcker till för att bestämma determinanten:

$$\det(AB), \quad \det(A^{-1}B^2), \quad \det(A+B).$$

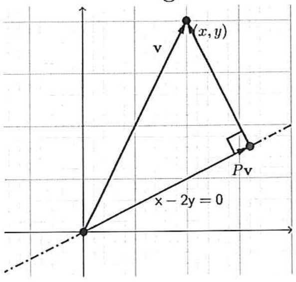
(b) Bestäm, som ett uttryck i k, värdet av determinanten av matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

och bestäm för vilka värden på k som C är inverterbar eller inte.

4. *(Egenvärden och egenvektorer)*

(a) För en 2×2-matris P gäller att $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ger koordinaterna för den ortogonala projektionen av en punkt (x, y) på linjen $x - 2y = 0$ (se figur). Vad har P för egenvärden, och vilka är de motsvarande egenvektorerna? (3p)



(b) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (3p)$$

5. *(Egenvärden, egenvektorer och diagonalisering)*

Matrisen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ har en egenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Vilket egenvärde tillhör egenvektorn $\mathbf{v}$? (1p)

(b) Bestäm matrisens övriga egenvärden (hur många egenvärden har den totalt?) och respektive egenvektorer (egenrum). (3p)

(c) Bestäm, om möjligt, en diagonal matris D och en inverterbar matris P så att

$$B = PDP^{-1}. \qquad (2p)$$

6. *Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.*

Utgå från uppgift 1, fallet där de angivna vektorerna bildar en bas, kalla denna bas $D = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$. ($D$ är alltså antingen B eller C.) Låt $E = ([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1])$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Antag att

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

är en linjär avbildning sådan att

$$\mathbf{F}(\mathbf{d}_1) = 3\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{F}(\mathbf{d}_2) = 2\mathbf{d}_2, \quad \mathbf{F}(\mathbf{d}_3) = \mathbf{d}_3,$$

dvs D är en bas bestående av egenvektorer till avbildningen $\mathbf{F}$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{F}\right)_E^D$ för $\mathbf{F}$ från D-koordinater (för $\mathbf{v}$) till E-koordinater (för $\mathbf{F}(\mathbf{v})$).

(b) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{F}\right)_D^E$ för $\mathbf{F}$ från E-koordinater till D-koordinater.

(c) Bestäm avbildningsmatrisen $\left(\mathbf{F}\right)_E^E$ för $\mathbf{F}$ från E-koordinater till E-koordinater.

7. *Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.*

Matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har 1 och -1 som egenvärden.

För varje egenvärde λ bildar alla tillhörande egenvektorer, tillsammans med nollvektorn, *egenrummet* E_λ till detta egenvärde. Till varje sådant egenrum kan man välja en bas av linjärt oberoende egenvektorer som spänner egenrummet. Ett egenrum kan ha dimension ett eller högre.

(a) Bestäm en bas för respektive egenrum till matrisen Q.

(b) Är matrisen Q diagonaliserbar? Bestäm i så fall en matris S och en diagonal matris D så att

$$Q = PDP^{-1}.$$

(c) Går det att välja P som en *ortogonal* matris, dvs så att $P^{\mathsf{T}} = P^{-1}$ (transponatet fungerar som invers)? I så fall, om inte P från ovan redan är ortogonal, hur skulle P istället se ut då?

Lycka till! /SK&YA

Notation för koordinater och matriser för avbildningar.

Rekommenderad notation beskrivs här, med hänvisningar till notation i den kurslitteratur som används eller har använts.

Standardbas för $\mathbb{R}^n$. Med *standardbasen* för $\mathbb{R}^n$ menar vi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ där $\mathbf{e}_k$ har 1 som k:te komponent, och 0 som övriga komponenter.

Koordinatvektor för en vektor med avseende på en bas. Om $F = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ är en bas för ett vektorrum V så betecknar $(\mathbf{v})_F$ koordinatvektorn (en vektor i $\mathbb{R}^n$ som en $n \times 1$-matris) för $\mathbf{v}$ med avseende på basen F, dvs $\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix}(\mathbf{v})_F = \mathbf{v}$. (I Lemurell skrivs koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ som $\mathbf{v}_B$, i Andersson V_B, i Månsson&Nordbeck ingen särskild notation.)

Matris för linjär avbildning. Om $\mathbf{g} : V \to W$ är en linjär avbildning, B en bas för vektorrummet V och C en bas för vektorrummet W, så betecknar $\big(\mathbf{g}\big)_C^B$ matrisen med avseende på dessa baser för avbildningen $\mathbf{g}$, dvs

$$\big(\mathbf{g}(\mathbf{v})\big)_C = \big(\mathbf{g}\big)_C^B \big(\mathbf{v}\big)_B.$$

Om $V = W$ och $B = C$ kan vi kortare skriva $\big(\mathbf{g}\big)_B$ för $\big(\mathbf{g}\big)_B^B$.
(Lemurell (när $B = C$) noterar A_B, i Andersson $A_{B,C}$, där sammanhanget ger vilken avbildning matrisen gäller, I Månsson&Nordbeck ingen särskild notation.)

Basbytesmatris. En basbytesmatris från B-koordinater till C-koordinater (B och C baser för samma rum) kan skrivas $\big(B\big)_C$ eller $\big(\mathrm{id}\big)_C^B$.
(I Lemurell betecknas basbytesmatriser som $A_{C \leftarrow B}$ eller $A_{B \to C}$, i Andersson oftast som P, i Månsson&Nordbeck som $\mathbf{S}$, där sammanhanget ger mellan vilka baser den byter koordinater.)

Determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} A_{1,2} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} A_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

där $A_{i,j}$ är matrisen som fås från A genom att stryka rad i och kolonn j.

Diagonalisering

Om kolonnerna i P är egenvektorer till A så är

$$AP = PD$$

där D är en diagonalmatris.