HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för handel och företagande

TENTAMEN

Kurs Regressions- och tidsserieanalys – grundkurs G1F

Delkurs Tentamen

Kurskod ST308G **Högskolepoäng för tentamen** 6

Datum 231027 **Skrivtid** 14.15-19.30

Ansvarig lärare: Magnus Bredberg

Berörda lärare: Marie Lundgren och Magnus Bredberg

Hjälpmedel/bilagor: Kalkylator/Miniräknare Casio fx 82 MS, finns att låna i tentamenslokalen.

Formelsamling för grundkurser i statistik (orange framsida), finns att låna i tentamenslokalen.

Formelbilaga, finns att låna i tentamenslokalen.

Besöker skrivningen ☐ Ja ☒ Nej

Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Gränser

Betyg ges efter en samlad bedömning av svaren för respektive mål.

Betyget Godkänd på tentamen ges om man blivit godkänd på icke stjärnmarkerade uppgifter för respektive mål i tentan.

För betyget Väl godkänd krävs att man uppfyller kriterierna för betyget Godkänd och att man blivit godkänd på stjärnmarkerade uppgifter för mål 2 samt för ytterligare åtminstone ett mål.

Uppfylls inte kriteriet för betyget Godkänd ges betyget Underkänd.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till

Tentamen består av 7 uppgifter.

Examinerar mål 1. Genomföra och tolka resultaten av korrelationsanalys

1. En oljedistributör, väl förtrogen med regressionsanalys då hen läst kurser vid Högskolan i Skövde, vill bilda sig en uppfattning om hur oljekonsumtionen ser ut i ett stort villaområde. Distributören väljer slumpmässigt ut en villa varje månad och noterar bland annat oljeförbrukning och genomsnittlig utomhustemperatur under den aktuella månaden. Resultat:

Månad	Oljeförbr. (liter under månad) (y)	Medeltemp. under månad (x)
Jul	70	17.8
Aug	100	16.6
Sep	185	12.2
Okt	300	7.1
Nov	310	2.8
Dec	650	0.1
Jan	525	-2.9
Feb	640	-3.1
Mar	550	-0.7
Apr	275	4.4

Nedan återfinns summor som kan vara användbara i både uppgift 1 och 2:

$$17.8 + 16.6 + 12.2 + 7.1 + 2.8 + 0.1 + (-2.9) + (-3.1) + (-0.7) + 4.4 = 54.3$$
$$17.8^2 + 16.6^2 + 12.2^2 + 7.1^2 + 2.8^2 + 0.1^2 + (-2.9)^2 + (-3.1)^2 + (-0.7)^2 + 4.4^2 = 837.37$$
$$70 + 100 + 185 + 300 + 310 + 650 + 525 + 640 + 550 + 275 = 3\,605$$
$$70^2 + 100^2 + 185^2 + 300^2 + 310^2 + 650^2 + 525^2 + 640^2 + 550^2 + 275^2 = 1\,721\,075$$
$$17.8 \cdot 70 + 16.6 \cdot 100 + 12.2 \cdot 185 + 7.1 \cdot 300 + 2.8 \cdot 310 + 0.1 \cdot 650 + (-2.9) \cdot 525 + (-3.1) \cdot 640 + (-0.7) \cdot 550 + 4.4 \cdot 275 = 5544.5$$

a) Undersök på 10%-nivån om det finns något linjärt samband mellan variablerna genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

b) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i a) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

c) Undersök på 10%-nivån om det finns något negativt linjärt samband mellan variablerna genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

d) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i c) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Examinerar mål 2. Analysera regressionsmodeller med hjälp av minstakvadratmetoden

2. Denna uppgift handlar om enkel linjär regression och använder datamaterialet i uppgift 1 ovan.

a) Anpassa en regressionslinje till datamaterialet i uppgift 1). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

b) Vad är, enligt modellen i deluppgift a), den förväntade oljeförbrukningen under en månad vid en medeltemperatur på 10 grader? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

c) Intervallskatta den förväntade oljeförbrukningen under en månad vid en medeltemperatur på 10 grader. Använd konfidensgraden 95 procent. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

3. Oljedistributören i uppgift 1 och 2 ovan samlade även in uppgifter om bostadens yta och tilläggsisolering(1=ja och 0=nej). Distributören anpassade en multipel linjär regressionsmodell innehållande samtliga variabler. Resultatet av analysen finns nedan.

Oljeförbruk:	Oljeförbrukning i liter under en månad
Medeltemperatur:	Medeltemperatur under månaden
Bostadsyta:	Bostadsyta i kvadratmeter
Isolering:	Tilläggsisolering, 1=Ja och 0=Nej.

Regression Equation

Oljeförbruk = 246,1 - 27,88 Medeltemperatur + 1,818 Bostadsyta - 67,7 Isolering

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	246,1	37,9	6,49	0,001	
Medeltemperatur	-27,88	1,17	-23,89	0,000	1,04
Bostadsyta	1,818	0,220	8,27	0,000	1,04
Isolering	-67,7	17,4	-3,88	0,008	1,03

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
26,5912	98,99%	98,49%	96,88%

a) Tolka värdet på regressionskoefficienten framför ”Medeltemperatur” , dvs värdet -27.88.

b) Tolka värdet på determinationskoefficienten R^2, dvs värdet 98.99%.

c) Visa hur man beräknar felmarginaler för regressionskoefficienter genom att beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för regressionskoefficienten framför ”Isolering”. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

d) Vilka regressionskoefficienter är signifikant skilda från noll? *Motivera svaret.*

4. För att skatta parametrarna α och β i regressionsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ används Minstakvadratmetoden. Beskriv med egna ord innebörden av Minstakvadratmetoden. (Ge med andra ord en förklaring till metodens namn.)

5. ** Vid ett odlingsförsök observerade man avkastning per ytenhet från ett antal försöksytor som tillförts olika mängder konstgödsel. Vi antar att olika försöksytor valts ut slumpmässigt från ett område där andra faktorer som kan tänkas påverka skördens storlek är relativt konstanta. Försöket gav följande resultat:

Gödselmängd (enhet: dt/ha) x	Skördemängd (enhet: dt/ha) y
1	25
2	50
3	60
4	70
5	70
6	60

Två olika modeller har skattats med hjälp av Minitab. Se resultatet från Minitab-körningarna nedan:

Modell 1:

Regression Equation

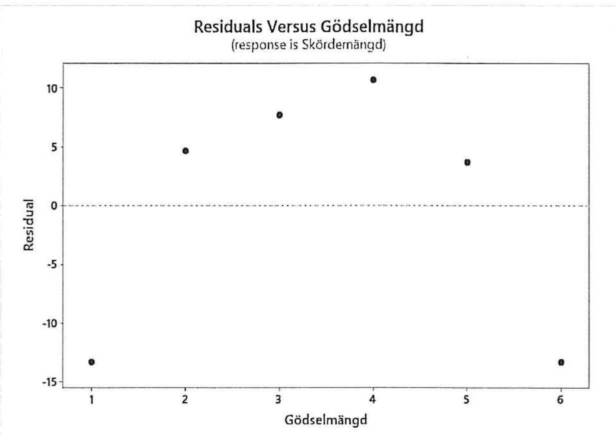
Skördemängd = 31,3 + 7,00 Gödselmängd

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	31,3	11,0	2,84	0,047	
Gödselmängd	7,00	2,84	2,47	0,069	1,00

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
11,8673	60,35%	50,44%	0,00%



Modell 2:

Regression Equation

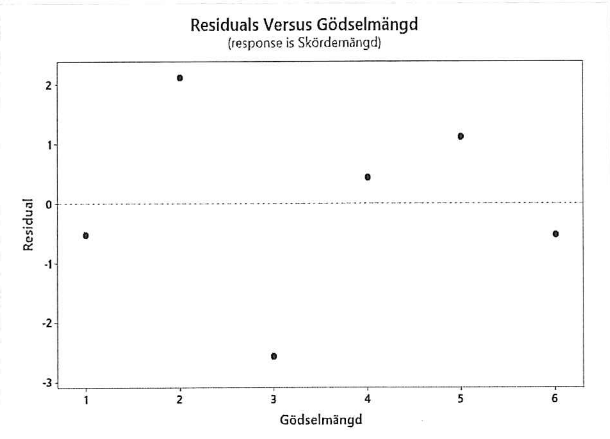
Skördemängd = -4,50 + 33,87 Gödselmängd - 3,839 Gödselmängd^2

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	-4,50	3,73	-1,21	0,314	
Gödselmängd	33,87	2,44	13,89	0,001	23,97
Gödselmängd^2	-3,839	0,341	-11,25	0,002	23,97

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
2,08452	99,08%	98,47%	96,69%



a) ** Tolka, om möjligt, parameterskattningarna i de två modellerna.
Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.

b) ** Gör en prognos av skördemängden då 4.5 dt/ha gödsel används. Motivera ditt val av modell.
Motivera ditt svar utifrån Minitabutskrifterna ovan.

Examinerar mål 3. Genomföra och tolka resultaten av vissa former av tidsserieanalys och göra prognoser

6. Tabellen nedan innehåller kvartalsvisa uppgifter över genomsnittlig försäljning av kläder per familj i ett land under en tidsperiod.

År	Vinter	Vår	Sommar	Höst
1	1 569	1 888	2 045	2 751
2	1 674	1 939	2 188	2 864
3	1 780	2 061	2 205	3 081

a) Bestäm säsongskomponenterna, under antagande att säsongsvariationerna kan beskrivas med en multiplikativ tidsseriemodell. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

b) ** Tolka de beräknade säsongskomponenterna.

c) ** Redogör allmänt för när det är lämpligt att använda en multiplikativ modell vid tidsserieanalys.

d) Beräkna de säsongsrensade värdena. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

e) ** Antag istället att den trend- och säsongsmässiga variationen skulle skattats med en multipel regressionsmodell. Beskriv hur den multipla regressionsmodellen i detta fall skulle se ut och beskriv hur parametrarna i modellen skulle tolkas. (Inga beräkningar ska göras.)

7. Nedanstående tabell visar ett företags faktiska försäljning:

År	Försäljning
1	10
2	14
3	16
4	18
5	12

a) Gör en prognos för år 6 med hjälp av enkel exponentiell utjämning ($\alpha = 0.3$). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

b) Gör en prognos för år 6 med hjälp av dubbel exponentiell utjämning ($\alpha = 0.3$ och $\beta = 0.3$). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

c) ** Förklara kortfattat vilka antaganden som prognoserna i a) respektive b) bygger på.

d) Avgör vilken prognosmetod som baserat på prognoser för vecka 3-5 ger lägst MSE. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

KORRELATION

Kovariansen mellan två stokastiska variabler

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \qquad (401)$$

Korrelationskoefficienten i populationen

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (402)$$

Korrelationskoefficienten i stickprovet (Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient)

$$r = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2 \sum(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}} \qquad (403)$$

Test av H_0: $\rho = 0$

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} \sim t_{n-2} \qquad (404)$$

Spearmans rangkorrelationskoefficient (för material utan "ties")

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad (405)$$

Test av H_0: $\rho_S = 0$

Positivt samband: Förkasta H_0 då $r_s >$ tabellvärde

Negativt samband: Förkasta H_0 då $r_s <$ negativt tabellvärde

REGRESSION

Enkel linjär regression

Modell: $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma^2)$ (406)

$$b = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \qquad (407)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad (408)$$

Determinationskoefficienten

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad \text{där} \qquad (409)$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \qquad (410)$$

$$\left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right) - b\left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}\right)$$

$$SST = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \qquad (411)$$

Skattning av residualvariansen σ^2

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} \quad \text{eller} \quad s^2 = \frac{n-1}{n-2} s_y^2 (1 - r^2) \qquad (412)$$

Variansen hos b-koefficienten

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \quad \text{(om } \sigma \text{ är känd)} \qquad (413)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \quad \text{(om } \sigma \text{ är okänd)} \qquad (414)$$

Konfidensintervall för β

$$b \pm t_{n-2,\alpha/2} s_b \qquad (415)$$

Test av $H_0: \beta = 0$

$$\frac{b}{s_b} \sim t_{n-2} \qquad (416)$$

Prediktionsintervall för Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2,\alpha/2}\, s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \tag{417}$$

Konfidensintervall för förväntat värde på Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2,\alpha/2}\, s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \tag{418}$$

Multipel linjär regression

Modell: $Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma)$ (419)

Beräkningar och analys genomförs med hjälp av datorprogram för multipel linjär regression. Formlerna som följer kan användas för att dels tolka den standardutskrift som fås genom datorkörningen och dels göra kompletterande analyser.

Kvadratsummor och determinationskoefficient

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \tag{420}$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{421}$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2 \tag{422}$$

$$SST = SSR + SSE \tag{423}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \tag{424}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-K-1)}{SST/(n-1)} \tag{425}$$

Skattning av residualvariansen

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-K-1} \tag{426}$$

Konfidensintervall för den i:te β-koefficienten

$$b_i \pm t_{n-K-1,\alpha/2} s_{b_i} \tag{427}$$

Test av H_0: $\beta_i = 0$

$$\frac{b_i}{s_{b_i}} \sim t_{n-K-1} \tag{428}$$

Test av H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_K = 0$

$$\frac{SSR/K}{SSE/(n-K-1)} \sim F_{K,n-K-1} \tag{429}$$

eller

$$\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-K-1}{K} \sim F_{K,n-K-1} \tag{430}$$

Icke-linjär regression

Polynomsamband

Modell: $Y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \cdots + \beta_K x_i^K + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma)$ (431)

Använd formler/program för multipel linjär regression med:
$x_1 = x, x_2 = x^2, \ldots, x_K = x^K$

Exponentiella samband

Modell: $Y_i = \alpha \cdot \beta^{x_i} \cdot 10^{\varepsilon_i}$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma)$ (432)

Logaritmering ger: $\lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \lg(\beta)x_i + \varepsilon_i$ (433)

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

Loglinjära samband

Modell: $Y_i = \alpha \cdot x_i^{\beta} \cdot 10^{\varepsilon_i}$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma^2)$ (434)

Logaritmering ger $\lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \beta \cdot \lg(x_i) + \varepsilon_i$ (435)

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

PROGNOSMETODIK

Exponentiell utjämning

Prognos med enkel exponentiell utjämning

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_1 = y_1 \tag{436}$$
$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1} \tag{437}$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t+h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t \tag{438}$$

Medelkvadratavvikelse

$$\text{MSE} = \frac{\sum (y_{t+h} - \hat{y}_{t+h})^2}{n} \tag{439}$$

Genomsnittlig absolut procentavvikelse

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum \frac{|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{y_{t+h}} \tag{440}$$

Prognos med Holt´s linjära trend algoritm

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_2 = y_2 \tag{441}$$
$$T_2 = y_2 - y_1 \tag{442}$$
$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \tag{443}$$
$$T_t = \beta (S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta) T_{t-1} \tag{444}$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t + h enligt

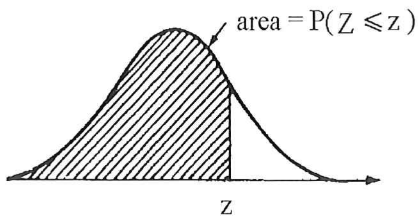
$$\hat{y}_{t+h} = S_t + h \cdot T_t \tag{445}$$

TABELLER

Tabell 1. Kritiska värden vid ensidigt test av Spearmans rangkorrelationskoefficient

	α			
n	.050	.025	.010	.005
5	.900	–	–	–
6	.829	.886	.943	–
7	.714	.786	.893	–
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Tabell 2. Normalfördelningen



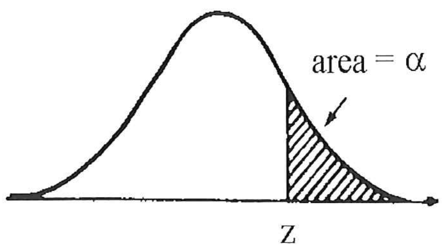
$P(Z \leq z)$ där $Z \sim Nf(0, 1)$

För negativa värden på z: Utnyttja att $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98214	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									

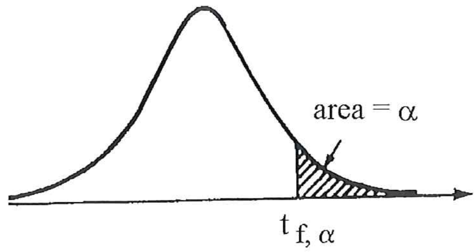
Normalfördelningen- vissa givna α-värden

α	z_α	α	z_α
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Tabell 3. t-fördelningen

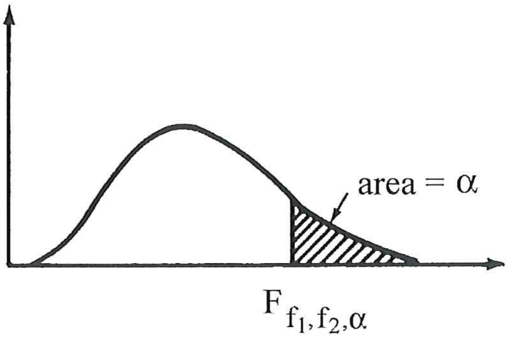
$P(X > t_{f,\alpha}) = \alpha$ där $X \sim t_f$



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	5.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabell 4. F-fördelningen, $\alpha = 0.05$

$P(X > F_{f_1,f_{2,\alpha}}) = \alpha$ där $X \sim F_{f_1,f_2}$



f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	243.	244.	245.	245.
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3 03
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69

Tabell 4 (fortsättning)

f_2 \ f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100	∞
1	246.	246.	247.	247.	248.	248.	249.	250.	251.	252.	252.	252.	253.	254.
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.53
4	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.67	5.66	5.63
5	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41	4.37
6	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71	3.67
7	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27	3.23
8	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97	2.93
9	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76	2.71
10	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59	2.54
11	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46	2.40
12	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35	2.30
13	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.27	2.26	2.21
14	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.20	2.19	2.13
15	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.07
16	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07	2.01
17	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.03	2.02	1.96
18	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98	1.92
19	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.88
20	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91	1.84
24	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.73
30	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70	1.62
40	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.51
50	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.58	1.54	1.52	1.44
60	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48	1.39
80	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43	1.32
100	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39	1.28
∞	1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24	1.00