

Institutionen för handel och företagande

TENTAMEN

Kurs Regressions- och tidsserieanalys – grundkurs G1F

Delkurs Tentamen

Kurskod ST308G

Högskolepoäng för tentamen 6

Datum 250616

Skrivtid 8.15-13.30

Ansvarig lärare: Marie Lundgren

Berörda lärare: Marie Lundgren och Magnus Bredberg

Hjälpmedel/bilagor: Kalkylator/Miniräknare Casio fx 82 MS, finns att låna i tentamenslokalen.

Formelsamling för grundkurser i statistik (ljusgrön framsida) finns att låna i tentamenslokalen.

Formelbilaga, finns bifogad tentamen.

Besöker skrivningen ☐ Ja ☒ Nej

Anvisningar ☐ Ta nytt blad för varje lärare

☒ Ta nytt blad för varje ny fråga

☒ Skriv endast på en sida av papperet.

☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.

☒ Numrera lösbladen löpande.

☒ Använd inte röd penna.

☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Gränser **Betyg ges efter en samlad bedömning av svaren för respektive mål.**

Betyget Godkänd på tentamen ges om man blivit godkänd på icke stjärnmarkerade uppgifter för respektive mål i tentan.

För betyget Väl godkänd krävs att man uppfyller kriterierna för betyget Godkänd och att man blivit godkänd på stjärnmarkerade uppgifter för mål 2 samt för ytterligare åtminstone ett mål.

Uppfylls inte kriteriet för betyget Godkänd ges betyget Underkänd.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till

Tentamen består av 7 uppgifter.

Examinerar mål 1. Genomföra och tolka resultaten av korrelationsanalys

En mäklare som är verksam på en semesterort i USA har samlat ihop Pris per kvadratmeter (y) och Ålder (x) för tio sålda lägenheter på en aktuell semesterort. Resultat:

Lägenhet nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pris per kvadrat(y)	550	253	380	568	320	420	590	363	544	229
Ålder(x)	2.6	17.5	1.0	8.5	30.4	12.5	6.6	30.0	6.8	14.7

Priserna i tabellen ovan anges i *amerikanska dollar* och åldern anges i antal *år*.

Nedan återfinns summor som kan vara användbara i både uppgift 1 och 2:

$$\begin{aligned}550 + 253 + 380 + 568 + 320 + 420 + 590 + 363 + 544 + 229 &= 4\,217 \\550^2 + 253^2 + 380^2 + 568^2 + 320^2 + 420^2 + 590^2 + 363^2 + 544^2 + 229^2 &= 1\,940\,579 \\2.6 + 17.5 + 1.0 + 8.5 + 30.4 + 12.5 + 6.6 + 30.0 + 6.8 + 14.7 &= 130.6 \\2.6^2 + 17.5^2 + 1.0^2 + 8.5^2 + 30.4^2 + 12.5^2 + 6.6^2 + 30.0^2 + 6.8^2 + 14.7^2 &= 2\,672.56 \\2.6 \cdot 550 + 17.5 \cdot 253 + 1.0 \cdot 380 + 8.5 \cdot 568 + 30.4 \cdot 320 + 12.5 \cdot 420 + 6.6 \cdot 590 + \\30.0 \cdot 363 + 6.8 \cdot 544 + 14.7 \cdot 229 &= 47\,893\end{aligned}$$

- a) Undersök på 5%-nivån om det finns något linjärt samband mellan variablerna Pris per kvadratmeter och Ålder genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i a) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Undersök på 5%-nivån om det finns något negativt linjärt samband mellan variablerna Pris per kvadratmeter och Ålder genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- d) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i c) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Examinerar mål 2. Analysera regressionsmodeller med hjälp av minstakvadratmetoden

2. Denna uppgift handlar om enkel linjär regression och använder datamaterialet i uppgift 1 ovan.

- a) Anpassa en regressionslinje till datamaterialet i uppgift 1). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Vad är, enligt modellen i deluppgift a), den förväntade prisnivån för femton år gamla lägenheter? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Intervallskatta den förväntade prisnivån för femton år gamla lägenheter. Använd konfidensgraden 95 procent. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

3. Mäklaren i uppgift 1 och 2 ovan har samlat in nya data på pris, ålder, avstånd till busstation, antal affärer i närområdet och förekomst av balkong på tjugoen sålda lägenheter på den aktuella orten. Variabelbeteckningar följer nedan.

Pris per kvadrat (y) : Försäljningspris per kvadratmeter i amerikanska dollar.

Ålder: Lägenhetsålder i antal år.

Avstånd: Avstånd i meter till närmaste busstation

Antal_affärer: Antal affärer i närområdet

Balkong: Förekomst av balkong, 1 = Ja , 0 = Nej

Mäklaren anpassar en regressionsmodell för att bilda sig en uppfattning om hur prisnivån hänger samman med ålder, avstånd till buss, antal affärer och förekomst av balkong. Resultat nedan:

Regression Equation

Pris per kvadrat = 248,1 - 1,18 Ålder - 0,0397 Avstånd + 11,7 Antal_affärer + 194,4 Balkong

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	248,1	77,7	3,19	0,006	
Ålder	-1,18	2,07	-0,57	0,578	1,33
Avstånd	-0,0397	0,0177	-2,24	0,040	1,66
Antal_affärer	11,7	10,3	1,13	0,274	1,53
Balkong	194,4	56,5	3,44	0,003	1,32

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
95,7994	73,64%	67,05%	23,61%

- Tolka värdet på determinationskoefficienten R^2 , dvs värdet 73,64%.
- Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för regressionskoefficienten framför "Balkong".
Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.
- Tolka värdet på regressionskoefficienten för variabeln "Balkong". Det vill säga värdet 194,4.
- Vilka regressionskoefficienter är signifikant skilda från noll? *Motivera svaret.*

4. För att skatta parametrarna α och β i regressionsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ används Minstakvadratmetoden. Beskriv med egna ord innebörden av Minstakvadratmetoden. (Ge med andra ord en förklaring till metodens namn.)

5. ** Vid fem på varandra följande år har efterfrågad mängd av en vara, Y , priset på samma vara, x_1 , och inkomstutvecklingen, x_2 , observerats. Dessa observationer har använts för att skatta parametrarna i följande modell med hjälp av Minitab, $Y_i = \alpha \cdot x_{1i}^{\beta_1} \cdot x_{2i}^{\beta_2} \cdot 10^{\varepsilon_i}$. Resultatet från Minitab-körningen följer nedan.

Regression Analysis: lg(y) versus lg(x_1); lg(x_2)

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	2	0,017000	0,008500	6,80	0,128
Error	2	0,002500	0,001250		
Total	4	0,019500			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)
0,0353553	87,18%	74,36%

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
Constant	-0,1000	0,0990	-1,01	0,419
lg(x_1)	-1,000	0,589	-1,70	0,232
lg(x_2)	1,000	0,311	3,21	0,085

Regression Equation

$$\lg(y) = -0,1000 - 1,000 \lg(x_1) + 1,000 \lg(x_2)$$

- a) ** Skriv det skattade regressionssambandet på icke-linjär form utifrån Minitabutskriften ovan. Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.
- b) ** Tolka parameterskattningarna av β_1 och β_2 .
- c) ** Är regressionskoefficienten β_2 signifikant större än noll? Använd testnivån fem procent. Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.

Examinerar mål 3. Genomföra och tolka resultaten av vissa former av tidsserieanalys och göra prognoser

6. Ett företag som verkar på en klart säsongsbetonad marknad uppvisar följande omsättningssiffror:

Säsong	År	Omsättning
sommar	1	358
vinter	1-2	190
sommar	2	370
vinter	2-3	201
sommar	3	360
vinter	3-4	195

- a) Bestäm, med hjälp av glidande medelvärden och under antagande om en additiv modell, de två säsongskomponenterna. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Säsongrensa tidsserien. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Vad är den förväntade omsättningen för sommarhalvåret år 5? (Ledning: Anpassning av trendfunktion krävs.) *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Antag att man istället väljer att arbeta utifrån följande modell för att kunna skatta trendmässig och säsongsmässig variation simultant:

$$\text{Omsättning}_t = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 x + \varepsilon_t$$

där t = löpande numrering

$x = 1$ för sommar och 0 annars

Vi skattar parametrarna i modellen med Minstakvadrat-metoden med hjälp av Minitab och erhåller följande:

The regression equation is:

$$\text{Omsättning}_t = 192 + 0.88t + 168x$$

- d) ** Tolka de erhållna skattningarna av regressionskoefficienterna.
- e) Vad är den förväntade omsättningen för sommarhalvåret år 5 utifrån den skattade multipla modellen? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

7. Omsättningen i en servicebutik har de senaste sex månaderna utvecklats enligt följande:

Månad	Omsättning i kkr
1	130
2	140
3	135
4	138
5	150
6	131

Prognostisera omsättningen för månad 7 med hjälp av

- a) Enkel exponentiell utjämning, $\alpha = 0.3$. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Trepunkts glidande medelvärde. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Avgör vilken prognosmetod som baserat på prognoser för månad 4-6 ger lägst MSE. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

KORRELATION

Kovariansen mellan två stokastiska variabler

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (401)$$

Korrelationskoefficienten i populationen

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (402)$$

Korrelationskoefficienten i stickprovet (Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient)

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right) \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}} \quad (403)$$

Test av $H_0: \rho = 0$

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} \sim t_{n-2} \quad (404)$$

Spearmans rangkorrelationskoefficient (för material utan "ties")

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)} \quad (405)$$

Test av $H_0: \rho_s = 0$

Positivt samband: Förkasta H_0 då $r_s >$ tabellvärde

Negativt samband: Förkasta H_0 då $r_s <$ negativt tabellvärde

REGRESSION

Enkel linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma^2) \quad (406)$$

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad (407)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (408)$$

Determinationskoefficienten

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} \quad \text{där} \quad (409)$$

$$\text{SSE} = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right) - b \left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \right) \quad (410)$$

$$\text{SST} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \quad (411)$$

Skattning av residualvariansen σ^2

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} \quad \text{eller} \quad s^2 = \frac{n-1}{n-2} s_y^2 (1 - r^2) \quad (412)$$

Variansen hos b-koefficienten

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är känd}) \quad (413)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är okänd}) \quad (414)$$

Konfidensintervall för β

$$b \pm t_{n-2, \alpha/2} s_b \quad (415)$$

Test av $H_0: \beta = 0$

$$\frac{b}{s_b} \sim t_{n-2} \quad (416)$$

Prediktionsintervall för Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (417)$$

Konfidensintervall för förväntat värde på Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (418)$$

Multipel linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma) \quad (419)$$

Beräkningar och analys genomförs med hjälp av datorprogram för multipel linjär regression. Formlerna som följer kan användas för att dels tolka den standardutskrift som fås genom datorkörningen och dels göra kompletterande analyser.

Kvadratsummor och determinationskoefficient

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (420)$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (421)$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2 \quad (422)$$

$$SST = SSR + SSE \quad (423)$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (424)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-K-1)}{SST/(n-1)} \quad (425)$$

Skattning av residualvariansen

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-K-1} \quad (426)$$

Konfidensintervall för den i:te β -koefficienten

$$b_i \pm t_{n-K-1, \alpha/2} s_{b_i} \quad (427)$$

Test av $H_0: \beta_i = 0$

$$\frac{b_i}{s_{b_i}} \sim t_{n-K-1} \quad (428)$$

Test av $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_K = 0$

$$\frac{SSR/K}{SSE/(n-K-1)} \sim F_{K,n-K-1} \quad (429)$$

eller

$$\frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-K-1}{K} \sim F_{K,n-K-1} \quad (430)$$

Icke-linjär regression

Polynomsamband

Modell: $Y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_K x_i^K + \varepsilon_i$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma)$ (431)

Använd formel/program för multipel linjär regression med:
 $x_1 = x, x_2 = x^2, \dots, x_K = x^K$

Exponentiella samband

Modell: $Y_i = \alpha \cdot \beta^{x_i} \cdot 10^{\varepsilon_i}$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma)$ (432)

Logaritmering ger: $\lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \lg(\beta)x_i + \varepsilon_i$ (433)

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formel/program för enkel linjär regression.

Loglinjära samband

Modell: $Y_i = \alpha \cdot x_i^\beta \cdot 10^{\varepsilon_i}$ där $\varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma^2)$ (434)

Logaritmering ger $\lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \beta \cdot \lg(x_i) + \varepsilon_i$ (435)

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formel/program för enkel linjär regression.

PROGNOSMETODIK

Exponentiell utjämning

Prognos med enkel exponentiell utjämning

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_1 = y_1 \quad (436)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \quad (437)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t+h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t \quad (438)$$

Medelkvadrataavvikelse

$$MSE = \frac{\sum (y_{t+h} - \hat{y}_{t+h})^2}{n} \quad (439)$$

Genomsnittlig absolut procentavvikelse

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \frac{|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{y_{t+h}} \quad (440)$$

Prognos med Holt's linjära trend algoritm

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_2 = y_2 \quad (441)$$

$$T_2 = y_2 - y_1 \quad (442)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (443)$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (444)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t + h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t + h \cdot T_t \quad (445)$$

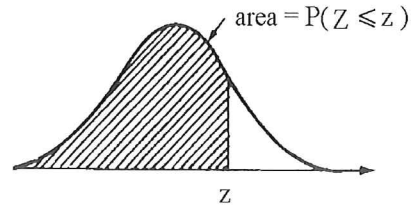
TABELLER

Tabell 1. Kritiska värden vid ensidigt test av Spearmans rangkorrelationskoefficient

n	α			
	.050	.025	.010	.005
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	—
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Tabell 2. Normalfördelningen

$P(Z \leq z)$ där $Z \sim N(0, 1)$

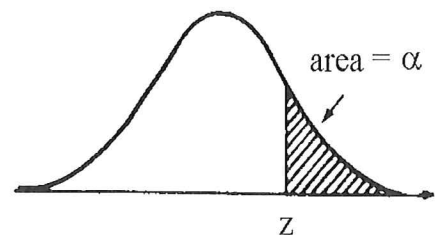


För negativa värden på z : Utnyttja att $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98214	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									

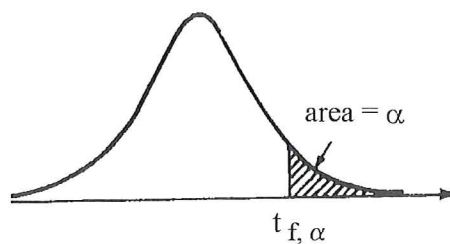
**Normalfördelningen-
vissa givna α -värden**

α	z_{α}	α	z_{α}
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Tabell 3. t-fördelningen

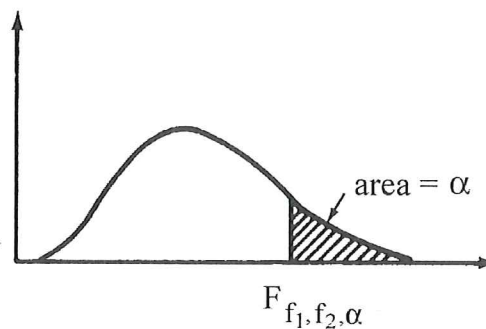
$$P(X > t_{f,\alpha}) = \alpha \text{ där } X \sim t_f$$



α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
f							
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	5.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabell 4. F-fördelningen, $\alpha = 0.05$

$$P(X > F_{f_1, f_2, \alpha}) = \alpha \text{ där } X \sim F_{f_1, f_2}$$



f_2	f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	243.	244.	245.	245.
2		18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3		10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95
50		4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86
80		3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82
100		3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79
∞		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69

Tabell 4 (fortsättning)

f_2	f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100	∞
1		246.	246.	247.	247.	248.	248.	249.	250.	251.	252.	252.	252.	253.	254.
2		19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3		8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.53
4		5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.67	5.66	5.63
5		4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41	4.37
6		3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71	3.67
7		3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27	3.23
8		3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97	2.93
9		3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76	2.71
10		2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59	2.54
11		2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46	2.40
12		2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35	2.30
13		2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.27	2.26	2.21
14		2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.20	2.19	2.13
15		2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.07
16		2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07	2.01
17		2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.03	2.02	1.96
18		2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98	1.92
19		2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.88
20		2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91	1.84
24		2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.73
30		2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70	1.62
40		1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.51
50		1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.58	1.54	1.52	1.44
60		1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48	1.39
80		1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43	1.32
100		1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39	1.28
∞		1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24	1.00