

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs Matematik Bas 2, behörighetsgivande kurs

Delkurs

Kurskod MA012B

Högskolepoäng för tentamen 12 fup

Datum 2026-06-02

Skrivtid 14.15-18.30

Ansvarig lärare Jessica Tidblom

Berörda lärare Konstantinos Tsoungkas

Hjälpmedel/bilagor Del I: Bifogat formelblad.
Del 2: Miniräknare och bifogat formelblad.

Övrigt Studenten får båda delarna samtidigt. Studenterna behöver lämna in lösningarna för DEL I innan de får tillgång till miniräknare och startar med för DEL II. Studenten kan vid behov påbörja DEL II utan räknare.

Anvisningar

☐

Ta nytt blad för varje lärare

☒

Ta nytt blad för varje ny fråga

☒

Skriv endast på en sida av papperet.

☒

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.

☒

Numrera lösbladen löpande.

☒

Använd inte röd penna.

☒

Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser

Tentamensbetyg G: 17 poäng

Tentamensbetyg VG: 27 poäng varav 7 poäng på VG-nivå.

Totalt antal möjliga poäng är 40.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA012B, Matematik Bas 2, behörighetsgivande kurs**2026-06-02, kl 14.15–18.30****Hjälpmedel:**

- Del I: Bifogat formelblad.
- Del II: Bifogat formelblad och godkänd miniräknare.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänt(VG), Godkänt(G) eller Underkänt(U). Tentamen består av två delar: Del I och II och tillsammans kan de ge 40 poäng varav 14 VG-poäng.

Kravgräns för tentamensbetyget:

G: 17 poäng

VG: 27 poäng varav minst 7 poäng på VG-nivå.

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (G eller VG) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (2/1) att en korrekt lösning ger två poäng på G-nivå och ett poäng på VG-nivå.

Till uppgifter där endast svar krävs behöver du endast ge ett kort svar i avsedd område på uppgiftsbladet. Till andra uppgifter behöver du lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter på lösblad. Använd nytt blad för varje uppgift.

För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara kortfattad, men tillräckligt utförlig och uppställd och formulerad så att tankegången lätt kan följas. Ett svar med t.ex. enbart värdet av en uträkning ger inte poäng. Numeriska värden kan anges som uttryck, lämpligt förenklade, där rotuttryck, logaritmer och exponentialuttryck kan ingå utöver *rena siffror*, om så behövs.

Namn:

Personnummer:

Del I: Digitala verktyg är inte tillåtna. Uppgifterna 1–5 kräver endast svar. Skriv ditt svar i svarsrutan under respektive uppgift. Uppgifterna 6–10 kräver fullständiga lösningar och skrivs på separat skrivpapper. När du är färdig med uppgifterna 1–10 lämnar du in Del I till skrivvakterna.

1. Lös ekvationen $\sin(x) \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x) = -\frac{1}{2}$, där $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. (2/0)

Svar:

2. (a) Beräkna värdet av C om

$$C = -3e^{i\pi} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}} dx.$$

(0/1)

Svar:

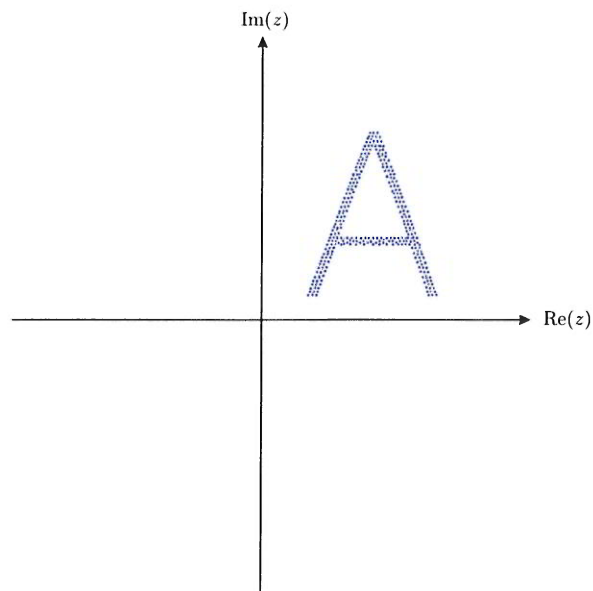
- (b) Bestäm amplituden A och perioden p för funktionen

$$f(x) = \sin(4x) + \sqrt{80} \cos(4x)$$

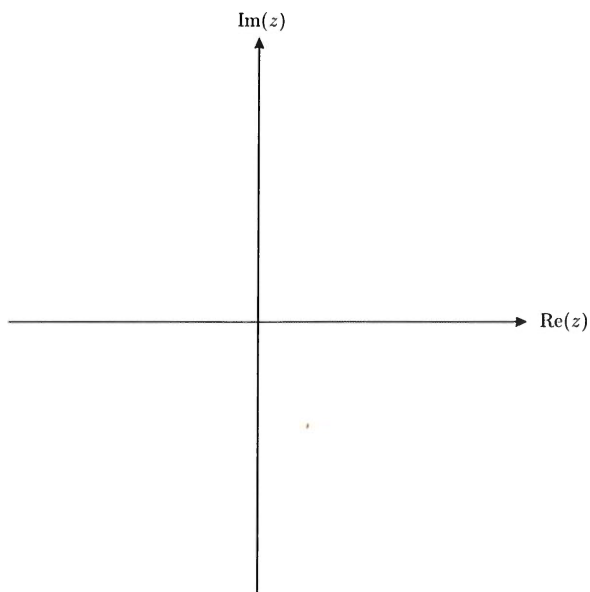
(2/0)

Svar:

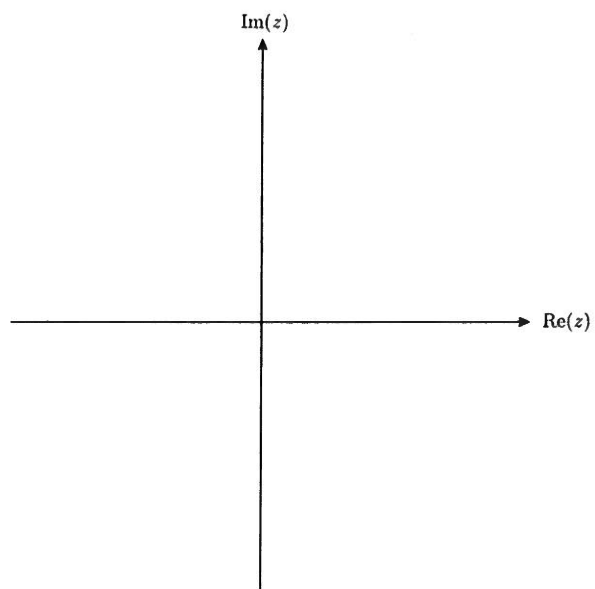
3. Det finns en mängd A av många komplexa tal. När vi ritar alla dessa tal i det komplexa planet ser mängden A ut så här:



- (a) Rita mängden av alla komplexkonjugat till talen i mängden A (1/0)



- (b) Rita mängden som fås när alla tal i den ursprungliga mängden A multipliceras med i . (0/1)



4. Polynomdivisionen av $x^2 - 4x + 7$ med $x - a$ ger resten $r = 4$. Bestäm alla möjliga värden på a . (2/0)

Svar:

5. (a) Skriv det komplexa talet $z = \frac{1+2i}{3-4i}$ på formen $z = a + bi$. (2/0)

Svar:

- (b) Lösningarna till en ekvation $z^4 = w$ bildar en kvadrat när de ritas i det komplexa planet. Vad är arean av denna kvadrat om vi vet att två av dessa lösningar är $z_1 = 2 + i$ och $z_2 = -1 + 2i$? (0/2)

Svar:

Uppgifterna 6–10 ska lösas på separat skrivpapper.

6. Lös ekvationen $x^3 + x + 10 = 0$ där x kan även vara ett komplext tal. (2/0)

7. Derivera funktionerna:

(a) $f(x) = x^3 \ln(x + 1)$ (2/0)

(b) $g(x) = \frac{\cos^4(x^2)}{e^{x^2}}$ (0/2)

8. Beräkna

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 3 \cos^2 t) dt$$

(2/0)

9. Låt $c > 0$ vara en konstant. Området mellan grafen till $f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, x -axeln samt linjerna $x = 1$ och $x = e$ roteras kring x -axeln. Bestäm konstanten c så att rotationsvolymen blir lika med 5π . (2/0)

10. Låt funktionen vara $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$.

(a) Bestäm funktionens asymptoter. (2/0)

(b) Bestäm funktionens extrempunkter och deras karaktär. (2/0)

(c) Skissa grafen till funktionen i ett koordinatsystem. (0/1)

Del II: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat skrivpapper. Du kan påbörja arbetet med dessa uppgifter utan räknare i väntan på att få lämna in Del I.

11. Visa att

$$\tan(2v) = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v} \quad (1/1)$$

12. Bestäm alla komplexa tal z sådana att deras avstånd i det komplexa planet från talet -2 är lika med deras avstånd från talet $2 - 2i$. (0/2)

13. En ballong blåses upp så att den behåller en perfekt sfärisk form. Vid ett visst tillfälle är radien 30 cm och ökar med 2 cm/s. Hur snabbt ökar volymen vid detta tillfälle? (2/0)

14. (a) Bestäm alla lösningar till $z^4 = 81$ som uppfyller $\operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)$. (2/0)

(b) Vilket är det minsta positiva heltalet n sådant att uttrycket $(-3 + 3i)^n$ är ett positivt reellt tal? (0/2)

15. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av y -axeln och graferna till $f(x) = |x - 1|$ och $g(x) = -x^2 + 5$. (0/2)

Formelblad matematik 4

Algebra

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aritmetik

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10 ¹²	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²

Potenser

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^0 = 1$$

Geometrisk summa

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy$$

$$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

Absolutbelopp

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

Funktioner och samband

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$k_1 \cdot k_2 = -1$, villkor för vinkelräta linjer

$ax + by + c = 0$, där inte både a och b är noll

Andragsgradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Potensfunktioner

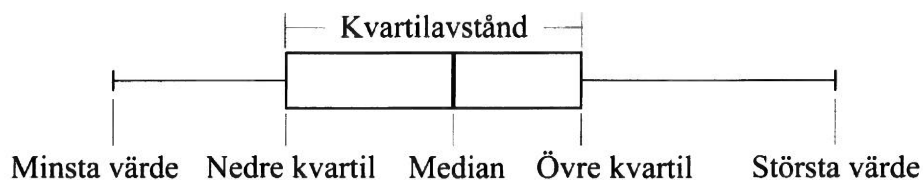
$$y = C \cdot x^a$$

Exponentialfunktioner

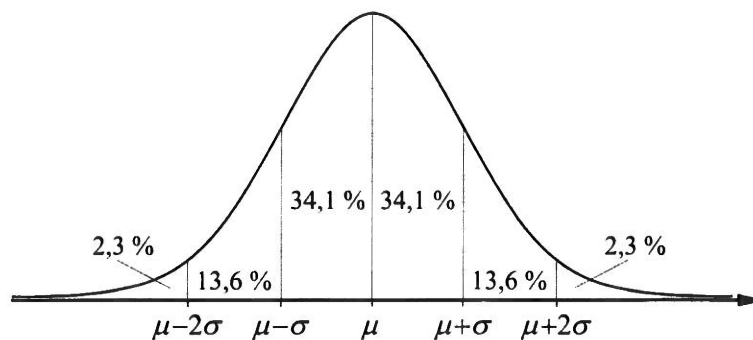
$$y = C \cdot a^x \quad a > 0 \text{ och } a \neq 1$$

Statistik och sannolikhet

Lådagram



Normalfördelning



Täthetsfunktion för normalfördelning

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Differential- och integralkalkyl

Derivatans definition $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$ ($x > 0$)	$\frac{1}{x}$
a^x ($a > 0$)	$a^x \ln a$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

**Integralkalkylens
fundamentalsats**

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{där } F'(x) = f(x)$$

**Primitiva
funktioner**

Funktion	Primitiva funktioner
k	$kx + C$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C \quad (x > 0)$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Rotationsvolym

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx \quad \text{rotation runt } x\text{-axeln}$$

$$V = \pi \cdot \int_a^b x^2 dy \quad \text{rotation runt } y\text{-axeln}$$

Komplexa tal**Representation**

$$z = a + bi \quad \text{Rektangulär form}$$

$$z = r(\cos v + i \sin v) \quad \text{Polär form}$$

$$z = r e^{iv} \quad \text{Exponentiell form}$$

Argument

$$\arg z = v \quad \tan v = \frac{b}{a}$$

Absolutbelopp

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Konjugat

$$\bar{z} = a - bi$$

Räknelagar

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2))$$

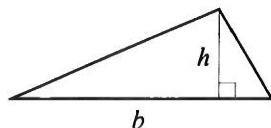
de Moivres formel

$$z^n = (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n (\cos nv + i \sin nv)$$

Geometri

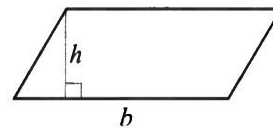
Triangel

$$A = \frac{bh}{2}$$



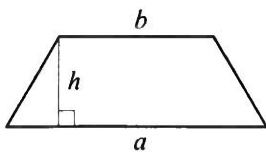
Parallelogram

$$A = bh$$



Parallelltrapets

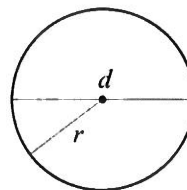
$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Cirkel

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$O = 2\pi r = \pi d$$



Cirkelsektor

v mäts i grader

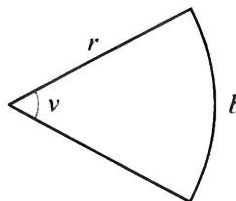
$$b = \frac{v}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$A = \frac{v}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$

v mäts i radianer

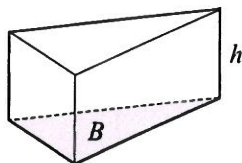
$$b = vr$$

$$A = \frac{vr^2}{2} = \frac{br}{2}$$



Prisma

$$V = Bh$$

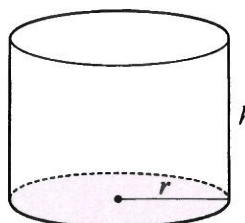


Cylinder

$$V = \pi r^2 h$$

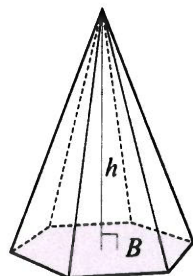
Mantelarea

$$A = 2\pi rh$$



Pyramid

$$V = \frac{Bh}{3}$$

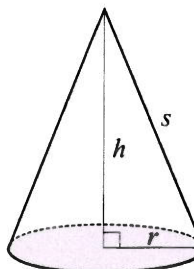


Kon

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Mantelarea

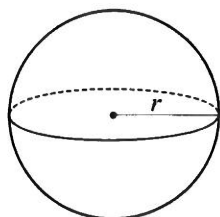
$$A = \pi rs$$



Klot

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

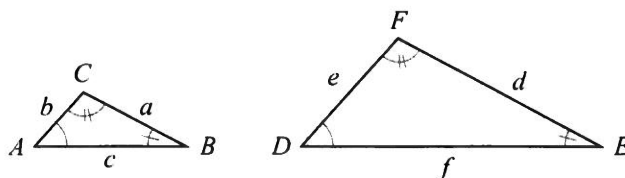
$$A = 4\pi r^2$$



Likformighet

Triangelarna ABC och DEF är likformiga

$$\text{om } \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Skala Areaskalan = (Längdskalan)²

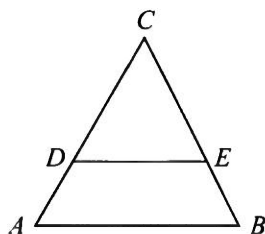
Volymskalan = (Längdskalan)³

Topptriangelsatsen

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC}$$

Transversalsatsen

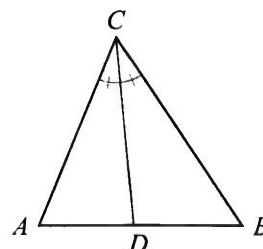
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



DE är parallell med AB

Bisektrissatsen

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

**Vinklar**

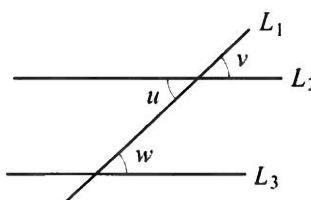
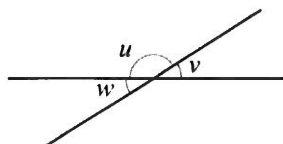
$u + v = 180^\circ$ Sidovinklar

$w = v$ Vertikalvinklar

L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

$v = w$ Likbelägna vinklar

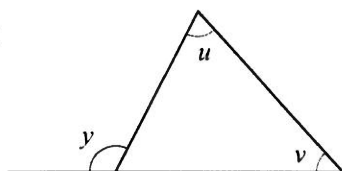
$u = w$ Alternatvinklar



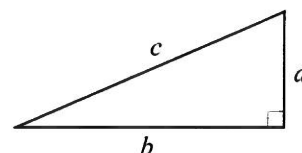
Vinkelsumman S i en n -hörning: $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$

Yttervinkelsatsen

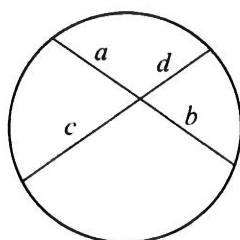
$$y = u + v$$

**Pythagoras sats**

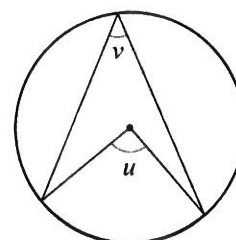
$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Kordasatsen**

$$ab = cd$$

**Randvinkelsatsen**

$$u = 2v$$

**Avståndsformeln**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

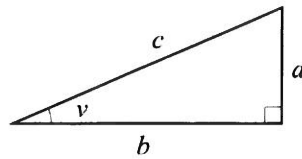
Mittpunktsformeln

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ och } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Trigonometri

Definitioner

Rätvinklig triangel

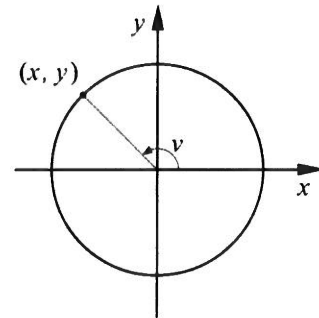


$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$

Enhetscirkel



$$\sin v = y$$

$$\cos v = x$$

$$\tan v = \frac{y}{x}$$

Sinussatsen

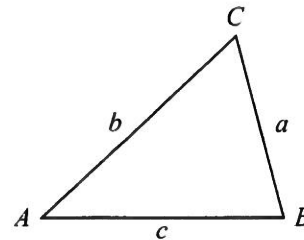
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Areasatsen

$$T = \frac{ab \sin C}{2}$$



Trigonometriska formler

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$$

$$\cos 2v = \begin{cases} \cos^2 v - \sin^2 v & (1) \\ 2 \cos^2 v - 1 & (2) \\ 1 - 2 \sin^2 v & (3) \end{cases}$$

$$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + v) \text{ där } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ och } \tan v = \frac{b}{a}$$

**Trigonometriska
funktionsvärden**

Vinkel v (grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Del II: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat skrivpapper. Du kan påbörja arbetet med dessa uppgifter utan räknare i väntan på att få lämna in Del I.

11. Visa att

$$\tan(2v) = \frac{2 \tan v}{1 - \tan^2 v}$$

(1/1)

12. Bestäm alla komplexa tal z sådana att deras avstånd i det komplexa planet från talet -2 är lika med deras avstånd från talet $2 - 2i$. (0/2)

13. En ballong blåses upp så att den behåller en perfekt sfärisk form. Vid ett visst tillfälle är radien 30 cm och ökar med 2 cm/s. Hur snabbt ökar volymen vid detta tillfälle? (2/0)

14. (a) Bestäm alla lösningar till $z^4 = 81$ som uppfyller $\text{Im}(z) \geq \text{Re}(z)$. (2/0)

(b) Vilket är det minsta positiva heltalet n sådant att uttrycket $(-3 + 3i)^n$ är ett positivt reellt tal? (0/2)

15. Beräkna arean av det område i första kvadranten som begränsas av y -axeln och graferna till $f(x) = |x - 1|$ och $g(x) = -x^2 + 5$. (0/2)