

Kurs: MA01XG Envariabelanalys, 10 hp, Tentamen omfattar 6 hp

Tentamensdag: 2026-08-18

Hjälpmedel : Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad. Ej räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg 5, 4, 3 eller U (underkänd), utifrån i hur hög grad inlämnade lösningar visar på uppfyllnad av kursmålen.

Lämna fullständiga väl motiverade lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

Med ett *analytiskt uttryck* menar vi ett uttryck som använder de fyra räknesätten, potenser, kvadratrötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, t.ex. $x^2e^{-x^3} + \ln \frac{\cos x}{x}$. Numeriska värden kan, om inget annat sägs, anges som förenklade analytiska uttryck där konstanter som π och e kan ingå utöver "rena siffror", t.ex. $\frac{7}{2} + 5e^3 \sin(\pi/7)$.

Sista sidorna består av en formelsamling med bland annat derivator och primitiva funktioner (obestämda integraler) till några standardfunktioner.

Följande kursmål bedöms på denna tentamen

- beskriva betydelse av och egenskaper hos begrepp som derivata och integral,
- koppla ihop fysiska modeller med en matematisk beskrivning inom kursens område,
- visa förståelse för och korrekt använda matematisk terminologi inom kursens område,
- ta till sig, presentera och diskutera matematiska och logiska resonemang på ett begripligt sätt med lämplig terminologi och stringens,
- använda algebraiska och analytiska egenskaper och metoder inom kursens område,
- analytiskt utveckla integraler och lösa differentialekvationer av vissa slag,
- värdera giltigheten hos matematiska resonemang och matematiska modeller.

Betygskriterier: För godkänt betyg, 3 krävs att studenten i tentamen har visat måluppfyllelse på ett nöjaktigt sätt. I detta ingår att använda och förklara principer relaterade till kursmålen på ett i övervägande felfritt och begripligt sätt, kunna lösa problem relaterade till kursmålen av rimlig svårighets- och komplexitetsgrad med viss säkerhet och utan större fel, och kommunicera matematiska resonemang och beräkningar på ett tillräckligt tydligt och förståeligt sätt enligt vedertagna former.

För högre betyg 4 och 5 ska i ökande grad studenten visa god förståelse av principer, stor säkerhet och endast smärre fel vid användandet av dem och vid problemlösning, kunna ta sig an problem av större komplexitet, och kommunicera med god tydlighet och stil.

Var och en av de sju avdelningarna kvantitativt, baserat på kriterierna, med upp till 6 poäng. För betyg 3 krävs minst 21 poäng totalt, för betyg 4: 28 poäng och för betyg 5: 35 poäng.

1. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? Du kan svara sant, falskt eller pass och behöver inte skriva någon motivering. (Tänk dock efter varför det är generellt sant, eller om du kan hitta ett motexempel.) Pass ger 0 poäng, annars ger rätt svar +1 poäng och felaktigt svar -1 poäng. Hela uppgiften kan aldrig ge negativ poäng.

- (a) Om f är kontinuerlig på intervallet $]0, 1[$, så antar f både ett största och ett minsta värde på $]0, 1[$.
- (b) Om f är deriverbar på intervallet $]0, 1[$ och $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in]0, 1[$, så är f strängt växande på $]0, 1[$.
- (c) Om $g(x) = 2 \sin^2(4x) + 2 \cos^2(4x)$, så är $g'(x) = 0$.
- (d)

$$\left| \int_{-2}^3 \cos^4(x^6) dx \right| \leq 5$$

(Du behöver inte beräkna integralen.)

- (e) Om det för en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gäller att $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ så har ekvationen $f(x) = 0$ minst en lösning.
- (f) Det stämmer att

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f'(b)g'(b) - f'(a)g'(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

2. Bestäm om funktionen f antar ett största värde respektive ett minsta värde på intervallet $[0, 2]$. Om sådana värden finns, ange också för vilket eller vilka värden på x de antas. Motivera väl.

(a)

$$f(x) = x(2 - x)^3.$$

(b)

$$f(x) = e^{x^2}(x^2 - 2)^3$$

3. Låt

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1 + 4t)}{t} dt \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{8}{6}x^3}{x^4}$$

för $x \neq 0$.

- (a) Bestäm ett uttryck för $f'(x)$.
- (b) Har $f'(x)$ ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$? Vad är i så fall detta gränsvärde?
- (c) Har $g(x)$ ett gränsvärde då $x \rightarrow 0$? Vad är i så fall detta gränsvärde?

4. (a) Låt f vara en styckvis konstant funktion där

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

om $x \in [n, n+1[$ för varje heltal $n \geq 0$.

Vad är värdet av integralen

$$\int_0^4 f(x) dx?$$

- (b) För samma funktion f , är den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

konvergent eller divergent? Om den är konvergent, vad är dess värde?

- (c) Är den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$$

konvergent? Vad är i så fall värdet av integralen?

5. En behållare töms på vätska. Volymen V i behållaren antas minska enligt

$$\frac{dV}{dt} = -cf(t/T),$$

där

$$f(x) = 3x(1-x)^2,$$

med start vid $t = 0$ och stopp vid $t = T$. Parametrarna c och T är en flödesparameter respektive den tid tömningen pågår.

- (a) Uttryck den totala volym som töms ur behållaren under tidsintervallet $0 \leq t \leq T$ som en integral.
- (b) Utveckla integralen till ett uttryck i c och T .
- (c) Bestäm värdet på parametern c så att 12 kubikmeter töms ut om tömningstiden är $T = 6$ minuter. Använd lämplig enhet.
6. (a) Bestäm en lösning $y = f(x)$ till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $f(0) = 0$.

- (b) Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 4x$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y = 1$ då $x = 0$.

7. (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 6y' + 5y = 0,$$

där

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{och} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

- (b) Bestäm en lösning $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y'' + 6y' + 5y = -3e^{-2x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoren

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

Lycka till! /SK&KT

Formelsamling Matematik

Trigonometriska identiteter

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(\alpha))^2$$

$$\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln(x))^q = 0 \quad (p > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-qx} = 0 \quad (q > 0)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0 \quad (m \text{ heltal})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0 \quad (q > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Elementära deriveringsregler

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Elementära integreringsregler

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (u = g(x))$$

För dessa regler finns naturligtvis också varianter för obestämda integraler. Eventuella förutsättningar måste naturligtvis vara uppfyllda.

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ (om $a \neq -1$)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$	$-\ln \cos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\frac{x \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln x + \sqrt{a+x^2} + C$
$\frac{1}{(\cos(x))^2}$		$\tan(x) + C$
$\frac{1}{(\sin(x))^2}$		$-\cot(x) + C$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x)$ är resttermen av ordning $(n+1)$ som till exempel kan uppskattas med $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ är något tal mellan a och x (vanligtvis vet man inte exakt vilket tal ξ är).

Potensseriutvecklingar

Funktion	Seriutveckling	Konvergensintervall
$(1+x)^a$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \dots$	$-1 \leq x \leq 1$

Geometrisk summa och serie

$$\sum_{k=0}^n ax^k = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (\text{om } x \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots = \frac{a}{1-x} \quad (\text{om } |x| < 1)$$