HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Flervariabelanalys G1F, 7,5 hp

Examinationsmoment Salstentamen

Kurskod MA305G

Högskolepoäng för examinationsmomentet

Datum 2026-08-24

Tentamenstid 14:15 – 19:30

Ansvarig lärare Konstantinos Tsougkas

Berörda lärare Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor: Formelblad bifogat

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☐ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser, se nästa sida.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 6

HÖGSKOLAN I SKÖVDE *Tentamen i matematik*

Flervariabelanalys (MA305G), **6,5 av 7,5 hp** **2026-08-24** kl 14.15–19.30

Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad. Ej räknedosa.
Tentamen bedöms med betyg godkänd, väl godkänd eller underkänd.
Tentamen innehåller 8 uppgifter, vardera värda 5 poäng för totalt 40 poäng.
Kriterier för godkänt betyg: Minst 20/40.
Kriterier för väl godkänt betyg: Minst 30/40.
Alla uppgifter ska ha fullständiga och tydliga lösningar som är väl motiverade. Skriv inte lösningarna till flera uppgifter på ett och samma blad. Skriv inte på båda sidor av ett ark.

1. Låt
$$f(x,y) = xy + e^{2x-2y}.$$
   (a) Visa att $f(x,y)$ uppfyller den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y.$$
   (b) Bestäm en ekvation till tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(x,y,z) = (0,0,1)$.

2. Låt
$$f(x,y) = xy^2 + \sin(x-y).$$
   (a) Beräkna riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f(1,1)$ i riktningen som ges av $\mathbf{v} = (2,1)$. Använd motsvarande enhetsvektor.
   (b) För $g(t) = f(x(t), y(t))$, bestäm $g'(0)$ givet att
$$x(t) = 1 + 2t, \quad y(t) = e^{-t}.$$

3. Låt
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x.$$
   (a) Måste $f(x,y)$ anta ett största och ett minsta värde på diskområdet
$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}?$$
   Motivera i så fall varför, och bestäm dessa extremvärden samt var de antas.
   (b) Undersök om f har något största värde på hela $\mathbb{R}^2$. I så fall, var antas det?

4. (a) Beräkna integralen
$$\iint_D (x^2+y^2)^2 \, dA$$
   över området
$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}.$$
   (b) Bestäm kurvintegralen
$$\int_C (x^2 + xy) \, ds,$$
   där C är linjen från $(0,0)$ till $(2,3)$.

5. Beräkna

$$\iiint_K z\,dV,$$

där

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 0 \leq x \leq y,\ z \geq 0\}.$$

6. (a) Är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (2xe^{3y} + 2y^3)\,\mathbf{i} + (3x^2e^{3y} + 6xy^2 + \cos y)\,\mathbf{j}$$

konservativt? I så fall beräkna dess potential.

(b) Beräkna

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är ellipsen

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

orienterad medurs.

7. (a) Ge ett exempel på en funktion $f(x, y, z)$ sådan att ytintegralen

$$\iint_Y f\,dS = 12,$$

där Y är ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9,\ 0 \leq z \leq 2\}.$$

(b) Bestäm flödesintegralen

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y^2z,\ 3y + \cos(xz),\ -z + e^{xy})$$

utåt genom begränsningsytan ∂K till klotet

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

8. (a) Låt

$$\mathbf{F} = (-2y + z,\ 2x + z,\ x^2 + y)$$

och låt S vara den del av paraboloiden

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

som ligger ovanför xy-planet, orienterad uppåt. Använd Stokes' sats för att beräkna

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) Beräkna arean begränsad av kurvorna

$$xy = 3, \quad xy = 12, \quad y = 5x, \quad y = 15x,$$

i första kvadranten.

Flervariabelanalys: Koordinatsystem & Formler

Koordinatsystem

Polära Koordinater (2D)

Kartesiska till Polära:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (r \geq 0)$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{(justera kvadrant)}$$

Polära till Kartesiska:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Areaelement: $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

Cylindriska Koordinater (3D)

Kartesiska till Cylindriska:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (r \geq 0)$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{(justera kvadrant)}$$
$$z = z$$

Cylindriska till Kartesiska:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Volymelement: $dV = dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$

Sfäriska Koordinater (3D)

(Konvention: R = avstånd från origo, ϕ = vinkel från positiva z-axeln ($0 \leq \phi \leq \pi$), θ = vinkel från positiva x-axeln i xy-planet ($0 \leq \theta < 2\pi$))

Kartesiska till Sfäriska:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (R \geq 0)$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{(justera kvadrant)}$$
$$\cos\phi = \frac{z}{R} \text{ och } \phi = \arccos\left(\frac{z}{R}\right)$$

Sfäriska till Kartesiska:

$$x = R\sin\phi\cos\theta$$
$$y = R\sin\phi\sin\theta$$
$$z = R\cos\phi$$

Volymelement: $dV = dx\,dy\,dz = R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$

Trigonometriska Identiteter och Värden

Grundläggande Identiteter

- Dubbla Vinkeln:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

- Halva Vinkeln:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Vanliga Trigonometriska Värden

θ (radianer)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
θ (grader)	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Odefinierad

Grundläggande Andragradsytor (Centrerade i Origo)

- **Ellipsoid:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Sfär om $a = b = c$)
- **Elliptisk Kon:** $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Axeln är z-axeln här)
- **Elliptisk Paraboloid:** $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Öppnar längs z-axeln, $c > 0$ öppnar uppåt)
- **Enmantlig Hyperboloid:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Axeln är z-axeln här)
- **Tvåmantlig Hyperboloid:** $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Axeln är z-axeln här, öppnar längs z)
- **Hyperbolisk Paraboloid (Sadel):** $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (Sadelform)
- **Cylinder (Elliptisk):** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Sträcker sig oändligt längs z-axeln)

Table 1: Volymer för 3D-kroppar

Kropp	Formel	Parametrar
Sfär	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	r: radie
Cylinder	$V = \pi r^2 h$	r: basradie, h: höjd
Kon	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	r: basradie, h: höjd

Table 2: Ytor för 3D-kroppar

Kropp	Formel	Parametrar
Sfär	$A = 4\pi r^2$	r: radie
Cylinder	$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$	r: basradie, h: höjd
Kon	$A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	r: basradie, h: höjd