

Institutionen för handel och företagande

TENTAMEN

Kurs Regressions- och tidsserieanalys – grundkurs G1F

Delkurs Tentamen

Kurskod ST308G

Högskolepoäng för tentamen 6

Datum 251211

Skrivtid 14.15-19.30

Ansvarig lärare: Magnus Bredberg

Berörda lärare: Marie Lundgren och Magnus Bredberg

Hjälpmedel/bilagor: Kalkylator/Miniräknare Casio fx 82 MS, finns att låna i tentamenslokalen.

Formelsamling för grundkurser i statistik (ljusgrön framsida) finns att låna i tentamenslokalen.

Formelbilaga, finns bifogad tentamen.

Besöker skrivningen ☐ Ja ☒ Nej

Anvisningar ☐ Ta nytt blad för varje lärare

☒ Ta nytt blad för varje ny fråga

☒ Skriv endast på en sida av papperet.

☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.

☒ Numrera lösbladen löpande.

☒ Använd inte röd penna.

☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Gränser Betyg ges efter en samlad bedömning av svaren för respektive mål.

Betyget Godkänd på tentamen ges om man blivit godkänd på icke stjärnmarkerade uppgifter för respektive mål i tentan.

För betyget Väl godkänd krävs att man uppfyller kriterierna för betyget Godkänd och att man blivit godkänd på stjärnmarkerade uppgifter för mål 2 samt för ytterligare åtminstone ett mål.

Uppfylls inte kriteriet för betyget Godkänd ges betyget Underkänd.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till

Tentamen består av 7 uppgifter.

Examinerar mål 1. Genomföra och tolka resultaten av korrelationsanalys

1. På en arbetsplats vill man kartlägga sambandet mellan inkomst, y , och utbildning, x . Man gör ett slumpmässigt urval om sju personer. Resultatet framgår av nedanstående tabell:

Individ	Inkomst (1000 \$) y	Utbildning (År) x
A	5.0	2
D	8.8	8
G	25.4	12
P	26.0	15
R	22.1	16
S	33.1	17
T	48.3	21

Nedan återfinns summor som kan vara användbara i både uppgift 1 och 2:

$$5.0 + 8.8 + 25.4 + 26.0 + 22.1 + 33.1 + 48.3 = 168.7$$

$$5.0^2 + 8.8^2 + 25.4^2 + 26.0^2 + 22.1^2 + 33.1^2 + 48.2^2 = 5\,340.51$$

$$2 + 8 + 12 + 15 + 16 + 17 + 21 = 91$$

$$2^2 + 8^2 + 12^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 21^2 = 1\,423$$

$$5.0 \cdot 2 + 8.8 \cdot 8 + 25.4 \cdot 12 + 26.0 \cdot 15 + 22.1 \cdot 16 + 33.1 \cdot 17 + 48.3 \cdot 21 = 2\,705.8$$

- a) Åskådliggör observationerna ovan i ett lämpligt diagram.
- b) Undersök på 1%-nivån om det finns något linjärt samband mellan variablerna Inkomst och Utbildning genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i a) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- d) Undersök på 1%-nivån om det finns något positivt linjärt samband mellan variablerna Inkomst och Utbildning genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- e) ** Vilka förutsättningarna bygger de ovan gjorda testen på?

Examinerar mål 2. Analysera regressionsmodeller med hjälp av minstakvadratmetoden

2. Denna uppgift handlar om enkel linjär regression och använder datamaterialet i uppgift 1 ovan.
- a) Anpassa en regressionslinje till datamaterialet i uppgift 1). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Vad är, enligt modellen i deluppgift a), den förväntade inkomstnivån för anställda med en utbildning på 10 år? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Intervallskatta den förväntade inkomstnivån för anställda med en utbildning på 10 år. Använd konfidensgraden 95 procent. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

3. Man kompletterade undersökningen i uppgift 1) och 2) ovan med variablerna Arbetslivserfarenhet och Ålder och samlade in data från sammanlagt tjugo anställda. Resultat:

Individ	Inkomst (1000 \$) y	Utbildning (År) x_1	Arbetslivserfarenhet (År) x_2	Ålder (År) x_3
A	5.0	2	9	29
B	9.7	4	18	50
C	28.4	8	21	41
D	8.8	8	12	55
E	26.0	15	6	30
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
Q	38.9	16	17	40
R	22.1	16	1	23
S	33.1	17	10	58
T	48.3	21	17	44

Anpassning av en multipel regressionsmodell till data i ovanstående tabell ger följande Minitab-utskrift:

Regression Equation

$$\hat{y} = -2,98 + 2,099 x_1 + 1,197 x_2 - 0,3107 x_3$$

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
Constant	-2,98	2,36	-1,27	0,224
x1	2,099	0,133	15,82	0,000
x2	1,197	0,147	8,15	0,000
x3	-0,3107	0,0577	-5,38	0,000

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)
2,50534	94,48%	93,45%

- Tolka värdet på regressionskoefficienten framför x_3 (Ålder). Det vill säga värdet -0.3107 .
- Tolka värdet på determinationskoefficienten R^2 , dvs värdet 94.48%.
- Visa hur man beräknar felmarginaler för regressionskoefficienter genom att beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för regressionskoefficienten framför x_1 (Utbildning). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- Vilka regressionskoefficienter signifikant skilda från noll? *Motivera svaret.*

4. För att skatta parametrarna α och β i regressionsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ används Minstakvadratmetoden. Beskriv med egna ord innebörden av Minstakvadratmetoden. (Ge med andra ord en förklaring till metodens namn.)

5. ** Vid fem på varandra följande år har efterfrågad mängd av en vara, Y , priset på samma vara, x_1 , och inkomstutvecklingen, x_2 , observerats. Dessa observationer har använts för att skatta parametrarna i följande modell med hjälp av Minitab, $Y_i = \alpha \cdot x_{1i}^{\beta_1} \cdot x_{2i}^{\beta_2} \cdot 10^{\epsilon_i}$. Resultatet från Minitab-körningen följer nedan.

Regression Analysis: lg(y) versus lg(x_1); lg(x_2)

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Regression	2	0,017000	0,008500	6,80	0,128
Error	2	0,002500	0,001250		
Total	4	0,019500			

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)
0,0353553	87,18%	74,36%

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
Constant	-0,1000	0,0990	-1,01	0,419
lg(x_1)	-1,000	0,589	-1,70	0,232
lg(x_2)	1,000	0,311	3,21	0,085

Regression Equation

$$\lg(y) = -0,1000 - 1,000 \lg(x_1) + 1,000 \lg(x_2)$$

- a) ** Skriv det skattade regressionssambandet på icke-linjär form utifrån Minitabutskriften ovan.
- b) ** Tolka parameterskattningarna av β_1 och β_2 .
- c) ** Är regressionskoefficienten β_2 signifikant större än noll? Använd testnivån fem procent. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Examinerar mål 3. Genomföra och tolka resultaten av vissa former av tidsserieanalys och göra prognoser

6. Följande tidsserie avser ett företags försäljning (milj kr) under 3 år. För varje år har man mätt ett låg- och ett högsäsongvärde. Lågsäsongen utgörs av första och högsäsongen av andra halvåret.

År	Lågsäsong	Högsäsong
1	40	82
2	56	102
3	72	117

Antag att tidsserien kan beskrivas med en modell som innehåller trend-, säsong- och slumpkomponenter.

- a) Bestäm, med hjälp av glidande medelvärden och under antagande om en additiv modell, de två säsongskomponenterna. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Uppgift 6, fortsättning

- b) Beräkna de säsongrensade värdena. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Anpassa en linjär trendfunktion till säsongrensade värden. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- d) Vad är den förväntade försäljningen under högsäsong år 4? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- e) ** I deluppgifterna ovan bestäms trend- och säsongskomponenter genom ett stegvist förfarande. En alternativ metod är att bestämma samtliga komponenter i ett enda steg. Teckna en sådan modell, definiera de ingående variablerna och redogör för hur de skattade parametrarna skall tolkas. Gör dock inga beräkningar.
- f) ** Nedan har trend- och säsongsmässig variation skattats med en multipel linjär regressionsmodell. Gör en prognos, punkt- och intervallskattning, för högsäsong år 4, samt tolka de gjorda prognoserna. *Använd Minitabutskriften nedan för att motivera ditt svar*

t	Högsäsong	Försäljning
1	0	40
2	1	82
3	0	56
4	1	102
5	0	72
6	1	117

Regression Equation

$$\text{Försäljning} = 30,88 + 8,375 \, t + 35,96 \, \text{Högsäsong}$$

Variable	Setting
t	8
Högsäsong	1

Fit	SE Fit	95% CI	95% PI	
133,833	1,68874	(128,459; 139,208)	(126,724; 140,943)	X

7. Försäljningen i en verksamhet har utvecklats enligt följande:

Vecka	Försäljning i kkr
1	50
2	63
3	58
4	40

- a) Gör en prognos för vecka 5 med hjälp av enkel exponentiell utjämning ($\alpha = 0.4$).
Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.
- b) Gör en prognos för vecka 5 med hjälp av dubbel exponentiell utjämning ($\alpha = 0.4$ och $\beta = 0.4$).
Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.
- c) ** Förklara kortfattat vilka antaganden som prognoserna i a) respektive b) bygger på.

KORRELATION

Kovariansen mellan två stokastiska variabler

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (401)$$

Korrelationskoefficienten i populationen

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (402)$$

Korrelationskoefficienten i stickprovet (Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient)

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right) \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}} \quad (403)$$

Test av $H_0: \rho = 0$

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} \sim t_{n-2} \quad (404)$$

Spearmans rangkorrelationskoefficient (för material utan "ties")

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)} \quad (405)$$

Test av $H_0: \rho_S = 0$

Positivt samband: Förkasta H_0 då $r_s >$ tabellvärde

Negativt samband: Förkasta H_0 då $r_s <$ negativt tabellvärde

REGRESSION

Enkel linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma^2) \quad (406)$$

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad (407)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (408)$$

Determinationskoefficienten

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} \quad \text{där} \quad (409)$$

$$\begin{aligned} \text{SSE} &= \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \\ &= \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right) - b \left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \right) \end{aligned} \quad (410)$$

$$\text{SST} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \quad (411)$$

Skattning av residualvariansen σ^2

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} \quad \text{eller} \quad s^2 = \frac{n-1}{n-2} s_y^2 (1 - r^2) \quad (412)$$

Variansen hos b-koefficienten

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är känd}) \quad (413)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är okänd}) \quad (414)$$

Konfidensintervall för β

$$b \pm t_{n-2, \alpha/2} s_b \quad (415)$$

Test av $H_0: \beta = 0$

$$\frac{b}{s_b} \sim t_{n-2} \quad (416)$$

Prediktionsintervall för Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (417)$$

Konfidensintervall för förväntat värde på Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (418)$$

Multipl linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma) \quad (419)$$

Beräkningar och analys genomförs med hjälp av datorprogram för multipl linjär regression. Formlerna som följer kan användas för att dels tolka den standardutskrift som fås genom datorkörningen och dels göra kompletterande analyser.

Kvadratsummor och determinationskoefficient

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (420)$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (421)$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (422)$$

$$SST = SSR + SSE \quad (423)$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (424)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-K-1)}{SST/(n-1)} \quad (425)$$

Skattning av residualvariansen

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-K-1} \quad (426)$$

Konfidensintervall för den i:te β -koefficienten

$$b_i \pm t_{n-K-1, \alpha/2} s b_i \quad (427)$$

Test av $H_0: \beta_i = 0$

$$\frac{b_i}{s_{b_i}} \sim t_{n-K-1} \quad (428)$$

Test av $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_K = 0$

$$\frac{SSR/K}{SSE/(n-K-1)} \sim F_{K,n-K-1} \quad (429)$$

eller

$$\frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-K-1}{K} \sim F_{K,n-K-1} \quad (430)$$

Icke-linjär regression

Polynomsamband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_K x_i^K + \varepsilon_i \text{ där } \varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma) \quad (431)$$

Använd formler/program för multipel linjär regression med:

$$x_1 = x, x_2 = x^2, \dots, x_K = x^K$$

Exponentiella samband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha \cdot \beta^{x_i} \cdot 10^{\varepsilon_i} \quad \text{där } \varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma) \quad (432)$$

$$\text{Logaritmering ger: } \lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \lg(\beta)x_i + \varepsilon_i \quad (433)$$

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

Loglinjära samband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha \cdot x_i^\beta \cdot 10^{\varepsilon_i} \quad \text{där } \varepsilon_i \sim Nf(0, \sigma^2) \quad (434)$$

$$\text{Logaritmering ger } \lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \beta \cdot \lg(x_i) + \varepsilon_i \quad (435)$$

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

PROGNOSMETODIK

Exponentiell utjämning

Prognos med enkel exponentiell utjämning

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_1 = y_1 \quad (436)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \quad (437)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t+h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t \quad (438)$$

Medelkvadrataavvikelse

$$MSE = \frac{\sum (y_{t+h} - \hat{y}_{t+h})^2}{n} \quad (439)$$

Genomsnittlig absolut procentavvikelse

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \frac{|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{y_{t+h}} \quad (440)$$

Prognos med Holt's linjära trend algoritm

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_2 = y_2 \quad (441)$$

$$T_2 = y_2 - y_1 \quad (442)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (443)$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (444)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t + h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t + h \cdot T_t \quad (445)$$

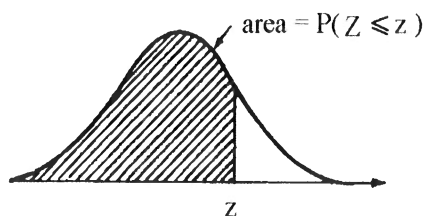
TABELLER

Tabell 1. Kritiska värden vid ensidigt test av Spearmans rangkorrelationskoefficient

n	α			
	.050	.025	.010	.005
5	.900	-	-	-
6	.829	.886	.943	-
7	.714	.786	.893	-
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Tabell 2. Normalfördelningen

$P(Z \leq z)$ där $Z \sim N(0, 1)$

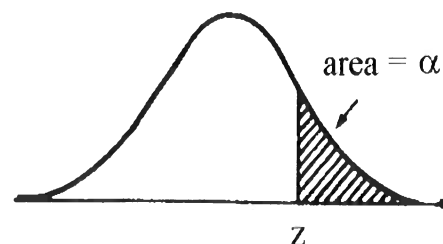


För negativa värden på z : Utnyttja att $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98214	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									

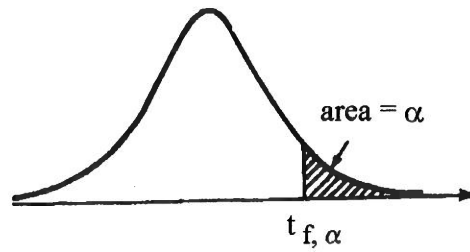
Normalfördelningen- vissa givna α -värden

α	z_{α}	α	z_{α}
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Tabell 3. t-fördelningen

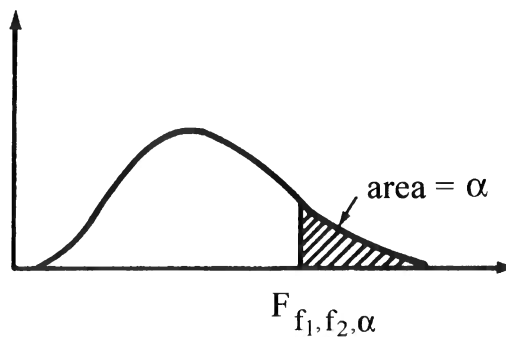
$$P(X > t_{f,\alpha}) = \alpha \text{ där } X \sim t_f$$



α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
f							
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	5.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabell 4. F-fördelningen, $\alpha = 0.05$

$$P(X > F_{f_1, f_2, \alpha}) = \alpha \text{ där } X \sim F_{f_1, f_2}$$



f_2	f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	243.	244.	245.	245.
2		18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3		10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95
50		4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86
80		3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82
100		3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79
∞		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69

Tabell 4 (fortsättning)

f_2	f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100	∞
1		246.	246.	247.	247.	248.	248.	249.	250.	251.	252.	252.	252.	253.	254.
2		19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3		8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.53
4		5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.67	5.66	5.63
5		4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41	4.37
6		3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71	3.67
7		3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27	3.23
8		3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97	2.93
9		3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76	2.71
10		2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59	2.54
11		2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46	2.40
12		2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35	2.30
13		2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.27	2.26	2.21
14		2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.20	2.19	2.13
15		2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.07
16		2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07	2.01
17		2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.03	2.02	1.96
18		2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98	1.92
19		2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.88
20		2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91	1.84
24		2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.73
30		2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70	1.62
40		1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.51
50		1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.58	1.54	1.52	1.44
60		1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48	1.39
80		1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43	1.32
100		1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39	1.28
∞		1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24	1.00