

Institutionen för handel och företagande

TENTAMEN

Kurs Regressions- och tidsserieanalys – grundkurs G1F

Delkurs Tentamen

Kurskod ST308G

Högskolepoäng för tentamen 6

Datum 240614

Skrivtid 8.15-13.30

Ansvarig lärare: Marie Lundgren

Berörda lärare: Marie Lundgren och Magnus Bredberg

Hjälpmedel/bilagor: Kalkylator/Miniräknare Casio fx 82 MS, finns att låna i tentamenslokalen.

Formelsamling för grundkurser i statistik (orange framsida), finns att låna i tentamenslokalen.

Formelbilaga, finns att låna i tentamenslokalen.

Besöker skrivningen ☐ Ja ☒ Nej

Anvisningar ☐ Ta nytt blad för varje lärare

☒ Ta nytt blad för varje ny fråga

☒ Skriv endast på en sida av papperet.

☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.

☒ Numrera lösbladen löpande.

☒ Använd inte röd penna.

☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Gränser

Betyg ges efter en samlad bedömning av svaren för respektive mål.

Betyget Godkänd på tentamen ges om man blivit godkänd på icke stjärnmarkerade uppgifter för respektive mål i tentan.

För betyget Väl godkänd krävs att man uppfyller kriterierna för betyget Godkänd och att man blivit godkänd på stjärnmarkerade uppgifter för mål 2 samt för ytterligare åtminstone ett mål.

Uppfylls inte kriteriet för betyget Godkänd ges betyget Underkänd.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till

Tentamen består av 7 uppgifter.

Examinerar mål 1. Genomföra och tolka resultaten av korrelationsanalys

1. Den 17 november 2004 kl.14:00 annonserades totalt 15 friliggande villor belägna i Lerums kommun i prisklassen 1.0 – 1.75 miljoners kronor ut på www.hemnet.se. I tabellen nedan framgår variablerna Rum(x) (antal rum) och Pris(y) (begärt pris i miljoner kronor) för dessa 15 villor.

Villa	Rum(x)	Pris(y) (Miljoner kronor)
1	4	1.025
2	2	1.075
3	4	1.150
4	5	1.250
5	4	1.300
6	4	1.300
7	5	1.400
8	5	1.495
9	6	1.575
10	5	1.675
11	5	1.675
12	5	1.675
13	4	1.750
14	7	1.750
15	4	1.750

Nedan återfinns summor som kan vara användbara i både uppgift 1 och 2:

$$\begin{aligned}4 + 2 + 4 + 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 5 + 5 + 5 + 4 + 7 + 4 &= 69 \\4^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2 + 7^2 + 4^2 &= 335 \\1.025 + 1.075 + 1.150 + 1.250 + 1.300 + 1.300 + 1.400 + 1.495 + 1.575 + 1.675 + 1.675 + 1.675 + 1.750 + 1.750 + 1.750 &= 21.845 \\1.025^2 + 1.075^2 + 1.150^2 + 1.250^2 + 1.300^2 + 1.300^2 + 1.400^2 + 1.495^2 + 1.575^2 + 1.675^2 + 1.675^2 + 1.675^2 + 1.750^2 + 1.750^2 + 1.750^2 &\approx 32.752 \\4 \cdot 1.025 + 2 \cdot 1.075 + 4 \cdot 1.150 + 5 \cdot 1.250 + 4 \cdot 1.300 + 4 \cdot 1.300 + 5 \cdot 1.400 + 5 \cdot 1.495 + 6 \cdot 1.575 + 5 \cdot 1.675 + 5 \cdot 1.675 + 5 \cdot 1.675 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1.750 + 4 \cdot 1.750 &= 102.8\end{aligned}$$

- a) Undersök på 1%-nivån om det finns något linjärt samband mellan variablerna Rum och Pris genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i a) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Undersök på 1%-nivån om det finns något positivt linjärt samband mellan variablerna Rum och Pris genom att beräkna Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- d) ** Vilka slutsatser kan du dra utifrån det i c) gjorda testet? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

Examinerar mål 2. Analysera regressionsmodeller med hjälp av minstakvadratmetoden

2. Denna uppgift handlar om enkel linjär regression och använder datamaterialet i uppgift 1 ovan.
- a) Anpassa en regressionslinje till datamaterialet i uppgift 1). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Vad är, enligt modellen i deluppgift a), den förväntade utannonserade prisnivån för villor med fyra rum? *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Intervallskatta den utannonserade prisnivån för en villa med fyra rum. Använd konfidensgraden 95 procent. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
3. Undersökningen i uppgift 1 och 2 ovan har kompletterats med variablerna Boyta och Tomtyta.

Rum: Antal rum

Boyta: Boyta i kvadratmeter

Tomtyta: Tomtyta i kvadratmeter

Pris (y) : Utannonserat pris i miljontals kronor.

<u>Villa</u>	<u>Rum</u>	<u>Boyta</u>	<u>Tomtyta</u>	<u>Pris (y)</u>
1	4	80	1064	1,025
2	2	68	2315	1,075
3	4	88	1433	1,150
4	5	78	1750	1,250
5	4	116	530	1,300
6	4	81	1250	1,300
7	5	115	772	1,400
8	5	75	7780	1,495
9	6	95	3772	1,575
10	5	125	978	1,675
11	5	105	1200	1,675
12	5	114	936	1,675
13	4	88	2631	1,750
14	7	188	891	1,750
15	4	110	1978	1,750

Man anpassar en regressionsmodell för att bilda sig en uppfattning om hur den utannonserade prisnivån hänger samman med variablerna Rum och Tomtyta. Resultat se nästa sida:

2024-06-14

Regressions- och tidsserieanalys -
grundkurs, G1F**Regression Equation**

$$\text{Pris} = 0,838 + 0,1307 \text{ Rum} + 0,000008 \text{ Tomtyta}$$

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
Constant	0,838	0,264	3,18	0,008
Rum	0,1307	0,0547	2,39	0,034
Tomtyta	0,000008	0,000034	0,25	0,806

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)
0,229198	32,77%	21,57%

- Tolka värdet på regressionskoefficienten framför "Rum", dvs värdet 0,1307.
- Tolka värdet på determinationskoefficienten R^2 , dvs värdet 32,77%.
- Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för regressionskoefficienten framför "Rum".
Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.
- Vilka regressionskoefficienter är signifikant skilda från noll? *Motivera svaret.*

- För att skatta parametrarna α och β i regressionsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ används Minstakvadratmetoden. Beskriv med egna ord innebörden av Minstakvadratmetoden. (Ge med andra ord en förklaring till metodens namn.)

- ** För en produkt föreligger uppgifter om efterfrågad mängd Q och pris P .

Antag att efterfrågan kan beskrivas med modellen: $Q_t = \alpha \cdot P_t^\beta \cdot 10^{\varepsilon_t}$

Utnyttja nedanstående datamaterial för att bestämma produktens priselasticitet (*ledning: skatta β i modellen ovan*). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

t	Q	P
1	900	2.00
2	400	2.30
3	300	2.40
4	100	2.80

Examinerar mål 3. Genomföra och tolka resultaten av vissa former av tidsserieanalys och göra prognoser

6. Tabellen nedan innehåller kvartalsvisa uppgifter över den mängd stål som transporteras på en viss järnväg.

År	kvartal 1	kvartal 2	kvartal 3	kvartal 4
1	872	820	775	841
2	903	876	787	851
3	969	778	686	718

- a) Bestäm säsongskomponenterna, under antagande att säsongsvariationerna kan beskrivas med en additiv tidsseriemodell. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) ** Redogör allmänt för när det är lämpligt att använda en additiv modell vid tidsserieanalys.
- c) Säsongrensa tidsserien. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- d) ** Redogör allmänt för vad säsongrensning av en tidsserie syftar till.
- e) ** Nedan har både den trend- och säsongsmässiga variationen skattats samtidigt med en multipel regressionsmodell och Minitab. Beskriv hur den multipla regressionsmodellen i detta fall ser ut och hur parameterskattningarna nedan ska tolkas. (Inga beräkningar ska göras.)

Regression Equation

$$y_t = 783,7 - 4,91 t + 155,5 \text{ kvartal}_1 + 70,4 \text{ kvartal}_2 + 58,9 \text{ kvartal}_4$$

$$\text{där } \text{kvartal}_1 = \begin{cases} 1 & \text{om det studerade kvartalet är en observation i kvartal 1} \\ 0 & \text{om det studerade kvartalet inte är en observation i kvartal 1} \end{cases}$$

där motsvarande gäller för variablerna kvartal_2 och kvartal_4.

7. Försäljningen i en verksamhet har utvecklats enligt följande:

Vecka	Försäljning i kkr
1	31
2	32
3	33
4	39

- a) Gör en prognos för vecka 5 med hjälp av naiv prognosmetod. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- b) Gör en prognos för vecka 5 med hjälp av trepunkts glidande medelvärden. *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*
- c) Gör en prognos för vecka 5 med hjälp av enkel exponentiell utjämning ($\alpha = 0.4$). *Motivera ditt svar utifrån gjorda beräkningar.*

KORRELATION

Kovariansen mellan två stokastiska variabler

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (401)$$

Korrelationskoefficienten i populationen

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (402)$$

Korrelationskoefficienten i stickprovet (Pearsons produktmomentkorrelationskoefficient)

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right) \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right)}} \quad (403)$$

Test av $H_0: \rho = 0$

$$\frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} \sim t_{n-2} \quad (404)$$

Spearmans rangkorrelationskoefficient (för material utan "ties")

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)} \quad (405)$$

Test av $H_0: \rho_s = 0$

Positivt samband: Förkasta H_0 då $r_s >$ tabellvärde

Negativt samband: Förkasta H_0 då $r_s <$ negativt tabellvärde

REGRESSION

Enkel linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma^2) \quad (406)$$

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad (407)$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (408)$$

Determinationskoefficienten

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} \quad \text{där} \quad (409)$$

$$\begin{aligned} \text{SSE} &= \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \\ &= \left(\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right) - b \left(\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \right) \end{aligned} \quad (410)$$

$$\text{SST} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \quad (411)$$

Skattning av residualvariansen σ^2

$$s^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} \quad \text{eller} \quad s^2 = \frac{n-1}{n-2} s_y^2 (1 - r^2) \quad (412)$$

Variansen hos b-koefficienten

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är känd}) \quad (413)$$

$$s_b^2 = \frac{s^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right)} \quad (\text{om } \sigma \text{ är okänd}) \quad (414)$$

Konfidensintervall för β

$$b \pm t_{n-2, \alpha/2} s_b \quad (415)$$

Test av $H_0: \beta = 0$

$$\frac{b}{s_b} \sim t_{n-2} \quad (416)$$

Prediktionsintervall för Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (417)$$

Konfidensintervall för förväntat värde på Y då $x = x_0$

$$\hat{y}_0 \pm t_{n-2, \alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}} \quad (418)$$

Multipel linjär regression

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad \text{där } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma) \quad (419)$$

Beräkningar och analys genomförs med hjälp av datorprogram för multipel linjär regression. Formlerna som följer kan användas för att dels tolka den standardutskrift som fås genom datorkörningen och dels göra kompletterande analyser.

Kvadratsummor och determinationskoefficient

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (420)$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (421)$$

$$SSE = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2 \quad (422)$$

$$SST = SSR + SSE \quad (423)$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (424)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-K-1)}{SST/(n-1)} \quad (425)$$

Skattning av residualvariansen

$$s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-K-1} \quad (426)$$

Konfidensintervall för den i:te β -koefficienten

$$b_i \pm t_{n-K-1, \alpha/2} s_{b_i} \quad (427)$$

Test av $H_0: \beta_i = 0$

$$\frac{b_i}{s_{b_i}} \sim t_{n-K-1} \quad (428)$$

Test av $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_K = 0$

$$\frac{SSR/K}{SSE/(n-K-1)} \sim F_{K,n-K-1} \quad (429)$$

eller

$$\frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-K-1}{K} \sim F_{K,n-K-1} \quad (430)$$

Icke-linjär regression

Polynomsamband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_K x_i^K + \varepsilon_i \text{ där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma) \quad (431)$$

Använd formler/program för multipel linjär regression med:
 $x_1 = x, x_2 = x^2, \dots, x_K = x^K$

Exponentiella samband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha \cdot \beta^{x_i} \cdot 10^{\varepsilon_i} \quad \text{där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma) \quad (432)$$

$$\text{Logaritmering ger: } \lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \lg(\beta)x_i + \varepsilon_i \quad (433)$$

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

Loglinjära samband

$$\text{Modell: } Y_i = \alpha \cdot x_i^\beta \cdot 10^{\varepsilon_i} \quad \text{där } \varepsilon_i \sim \text{Nf}(0, \sigma^2) \quad (434)$$

$$\text{Logaritmering ger } \lg(Y_i) = \lg(\alpha) + \beta \cdot \lg(x_i) + \varepsilon_i \quad (435)$$

Genomför beräkningar och analys på (den linjära) modellen med hjälp av formler/program för enkel linjär regression.

PROGNOSMETODIK

Exponentiell utjämning

Prognos med enkel exponentiell utjämning

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_1 = y_1 \quad (436)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1} \quad (437)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t+h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t \quad (438)$$

Medelkvadrataavvikelse

$$MSE = \frac{\sum (y_{t+h} - \hat{y}_{t+h})^2}{n} \quad (439)$$

Genomsnittlig absolut procentavvikelse

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \frac{|y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}|}{y_{t+h}} \quad (440)$$

Prognos med Holt's linjära trend algoritm

Beräkna de utjämnade värdena enligt

$$S_2 = y_2 \quad (441)$$

$$T_2 = y_2 - y_1 \quad (442)$$

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad (443)$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (444)$$

Vid tidpunkt t, gör prognos för tidpunkt t + h enligt

$$\hat{y}_{t+h} = S_t + h \cdot T_t \quad (445)$$

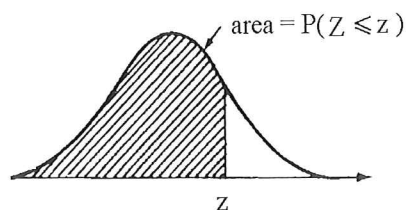
TABELLER

Tabell 1. Kritiska värden vid ensidigt test av Spearmans rangkorrelationskoefficient

n	α			
	.050	.025	.010	.005
5	.900	—	—	—
6	.829	.886	.943	—
7	.714	.786	.893	—
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

Tabell 2. Normalfördelningen

$P(Z \leq z)$ där $Z \sim N(0, 1)$

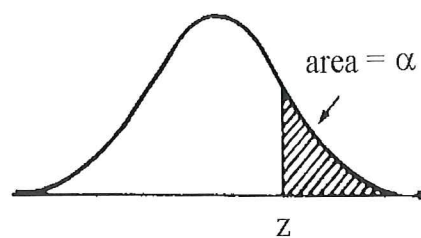


För negativa värden på z: Utnyttja att $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98214	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									

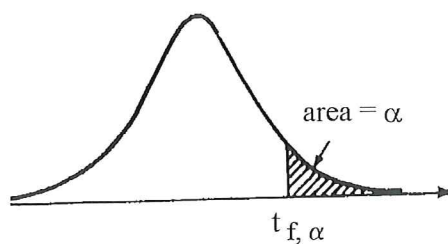
**Normalfördelningen-
vissa givna α -värden**

α	z_{α}	α	z_{α}
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Tabell 3. t-fördelningen

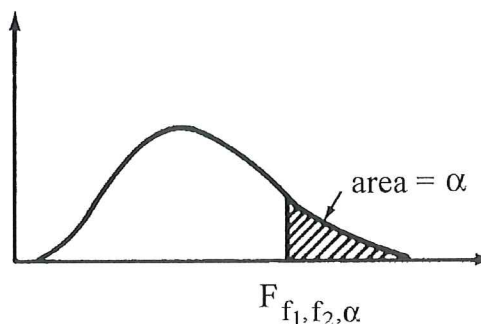
$P(X > t_{f,\alpha}) = \alpha$ där $X \sim t_f$



α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
f							
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.61
2	1.89	2.92	4.30	5.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Tabell 4. F-fördelningen, $\alpha = 0.05$

$$P(X > F_{f_1, f_2, \alpha}) = \alpha \text{ där } X \sim F_{f_1, f_2}$$



f_2	f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	243.	244.	245.	245.
2		18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3		10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86
11		4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64
13		4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55
14		4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42
16		4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37
17		4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33
18		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29
19		4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95
50		4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86
80		3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82
100		3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79
∞		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69

Tabell 4 (fortsättning)

f_2	f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100	∞
1		246.	246.	247.	247.	248.	248.	249.	250.	251.	252.	252.	252.	253.	254.
2		19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3		8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.53
4		5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.67	5.66	5.63
5		4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41	4.37
6		3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71	3.67
7		3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27	3.23
8		3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97	2.93
9		3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76	2.71
10		2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59	2.54
11		2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46	2.40
12		2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35	2.30
13		2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.27	2.26	2.21
14		2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.20	2.19	2.13
15		2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.07
16		2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07	2.01
17		2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.03	2.02	1.96
18		2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98	1.92
19		2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94	1.88
20		2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91	1.84
24		2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.73
30		2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70	1.62
40		1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.51
50		1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.58	1.54	1.52	1.44
60		1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48	1.39
80		1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43	1.32
100		1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39	1.28
∞		1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24	1.00