HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Matematik för ingenjörer IV G1F, 3 hp

Delprov: 1001 - Salstentamen

Kurskod: MA316G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2024-04-05

Skrivtid: 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor : Formelblad bifogas. Inga hjälpmedel utöver skrivmateriel.

Övrigt

Anvisningar

- ☒ Använd nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygskriterier utifrån kursmålen, se tentamenstesens inledning.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 6

Kurs: **MA316G Matematik för ingenjörer IV**
Tentamensdag: **2024-04-05** kl 08.30–12.30

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen. Uppgifter under avdelningen III, VG-uppgifter bedöms huvudsakligen för betyg VG. För godkänt betyg krävs minst hälften av poängsumman på vardera del I och del II, för väl godkänt minst 36 poäng totalt.

Lämna lösningar som går att följa, inklusive hänvisningar till vad du utnyttjar och kortfattad beskrivning av vad du gör (till exempel att du talar om vilken metod du använder) till alla uppgifter, om inte annat anges. Om du inte kommer fram till efterfrågat svar kan en partiell lösning också ge poäng.

Med ett *analytiskt uttryck* menar vi ett uttryck som använder de fyra räknesätten, potenser, kvadratrötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, etc t.ex. $x^2e^{-x^3} + \ln\frac{\cos x}{x}$, men inte integraluttryck. Numeriska värden kan anges som förenklade analytiska uttryck där faktorer som π och e kan ingå utöver "rena siffror", t.ex. $\frac{7}{2} + 5e^3\sin(\pi/7)$.

Om inte annat sägs, skall alla lösningar anges som analytiska uttryck.

I. Ordinära differentialekvationer och integration

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen 6p

   Find the general solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dx} - 5y = x^2.$$

2. Bestäm en funktion $y = f(x)$ som för $x > 0$ uppfyller den linjära differentialekvationen 6p

   Find a function $y = f(x)$ which for $x > 0$ satisfies the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x^3}{x^4+1}y = \frac{\sin x}{x^4+1}$$

   och villkoret $f(0) = 1$.

   and the condition $f(0) = 1$.

3. Bestäm lösningen $y = f(x)$ till differentialekvationen 6p

   Find the solution to the differential equation

$$y'' - 8y' + 7y = 49x$$

   med begynnelsevärdena

   having initial values

$$f(0) = 10, \quad f'(0) = 15.$$

(forts.)

II. Integrationsmetoder

4. Bestäm 6p

   Find

$$\int_0^c \frac{5x+3}{(x-7)(x+12)}dx$$

   som ett uttryck i c. För vilka värden på c gäller detta?

   as an expression in c. For which values of c is this valid?

5. Bestäm 6p

   Evaluate

$$\int_0^\pi (2+3t)\cos t\, dt.$$

6. För var och en av de två generaliserade integralerna, bestäm om den är divergent eller konvergent, och om den är konvergent, vad dess värde är. 6p

   For each of the improper integrals, decide if it is divergent or convergent, and if convergent, its value.

   (a)

$$\int_1^\infty \frac{2-x^2}{x^5}\, dx$$

   (b)

$$\int_0^1 \frac{x^2+x}{x\sqrt{x}}\, dx$$

   (Tips/*Hint*: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ och $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$)

(forts.)

III. VG-uppgifter.

7. Bestäm beroende på α om integralen 6p

Decide depending on the value α if the integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha x}+2}{e^x}\,dx$$

är konvergent eller divergent och då den är konvergent vad dess värde är.

is convergent or divergent and when convergent its value.

8. Bestäm lösningen till differentialekvationen 6p

Find the solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = 2t^3 - 2ty$$

med begynnelsevärdet $y\big|_{t=0} = -1$.

with the initial value $y\big|_{t=0} = -1$.

9. Bestäm lösningen till 6p

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = e^{3t}$$

med begynnelsevärden $y\big|_{t=0} = 1$, $\frac{dy}{dt}\big|_{t=0} = 3$.

Find the solution to the o.d.e. with initial values $y\big|_{t=0} = 1$, $\frac{dy}{dt}\big|_{t=0} = 3$.

Lycka till! /KT

Formelsamling Matematik

Trigonometriska identiteter

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2-1 = 1-2(\sin(\alpha))^2$

$(\cos(\frac{\alpha}{2}))^2 = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$

$(\sin(\frac{\alpha}{2}))^2 = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$

Standardgränsvärden

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{t}{x})^x = e^t$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a>1)$

$\lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0 \quad (q>0)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0 \quad (q>0)$

$\lim_{x\to 0^+} x^p(\ln(x))^q = 0 \quad (p>0)$

$\lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!} = 0 \quad (\text{m heltal})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a) \quad (a>0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

Elementära deriveringsregler

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Elementära integreringsregler

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \qquad (u=g(x))$$

För dessa regler finns naturligtvis också varianter för obestämda integraler. Eventuella förutsättningar måste naturligtvis vara uppfyllda.

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C(\text{ om } a\neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
e^x	e^x	e^x+C
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x\ln\lvert x\rvert-x+C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)+C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)+C$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
a^x	$a^x\ln(a)$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\frac{x\ln(x)-x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln\lvert x+\sqrt{a+x^2}\rvert+C$
$\frac{1}{(\cos(x))^2}$		$\tan(x)+C$
$\frac{1}{(\sin(x))^2}$		$-\cot(x)+C$

Taylors formel

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x)$ är resttermen av ordning (n+1) som till exempel kan uppskattas med $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ är något tal mellan a och x (vanlligtvis vet man inte exakt vilket tal ξ är).

Potensserieutvecklingar

Funktion	**Serieutveckling**	**Konvergensintervall**
$(1+x)^a$	$1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$	$-1<x<1$
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ldots$	$-1<x\leq 1$
$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ldots$	$-\infty<x<\infty$
$\arctan(x)$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\ldots$	$-1\leq x\leq 1$

Geometrisk summa och serie

$$\sum_{k=0}^{n}ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots ax^n=a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad(\text{om } x\neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots=\frac{a}{1-x}\quad(\text{om } \lvert x\rvert<1)$$