

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Matematik för ingenjörer IV, 3 hp

Examinationsmoment: 1001 Salstentamen

Kurskod MA316G

Högskolepoäng för examinationsmomentet 2

Datum 2025-04-11

Tentamenstid 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare Stefan Karlsson

Berörda lärare Konstantinos Tsoungkas

Hjälpmedel/bilagor: bifogat formelblad

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 6

Kurs: MA316G Matematik för ingenjörer IV**Tentamensdag: 2025-04-11 kl 08:15–12:30**

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygsgränser för kursmålen. Uppgifter under avdelningen III, VG-uppgifter bedöms huvudsakligen för betyg VG. För godkänt betyg krävs minst hälften av poängsumman på vardera del I och del II, för väl godkänt minst 36 poäng totalt.

Lämna lösningar som går att följa, inklusive hänvisningar till vad du utnyttjar och kortfattad beskrivning av vad du gör (till exempel att du talar om vilken metod du använder) till alla uppgifter, om inte annat anges. Om du inte kommer fram till efterfrågat svar kan en partiell lösning också ge poäng.

Med ett *analytiskt uttryck* menar vi ett uttryck som använder de fyra räknesätten, potenser, kvadratrötter, exponentialfunktioner, logaritmer, trigonometriska funktioner, etc t.ex. $x^2e^{-x^3} + \ln \frac{\cos x}{x}$, men inte integraluttryck. Numeriska värden kan anges som förenklade analytiska uttryck där faktorer som π och e kan ingå utöver "rena siffror", t.ex. $\frac{7}{2} + 5e^3 \sin(\pi/7)$.

Om inte annat sägs, skall alla lösningar anges som analytiska uttryck.

I. Ordinära differentialekvationer och integration

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen för $x > 0$ 6p

Find the general solution to the differential equation for $x > 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{3}{x(x^2 + 1)}.$$

2. Bestäm en funktion $y = f(x)$ som för $x \geq 0$ uppfyller den linjära differentialekvationen 6p

Find a function $y = f(x)$ which for $x \geq 0$ satisfies the linear differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{x \ln x}{e^x}$$

och villkoret $f(1) = 0$.

and the condition $f(1) = 0$.

3. Bestäm lösningen $y = f(x)$ till differentialekvationen 6p

Find the solution to the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 10x$$

med begynnelsevärdena

having initial values

$$f(0) = -\frac{3}{10}, \quad f'(0) = -10.$$

(forts.)

II. Integrationsmetoder

4. Bestäm

6p

Find

$$\int_0^c \frac{x-1}{(x-3)(x+2)} dx$$

som ett uttryck i c . För vilka värden på c gäller detta?

as an expression in c . For which values of c is this valid?

5. Bestäm

6p

Evaluate

$$\int_0^T 3t \sin t \, dt.$$

som ett uttryck i T .

as an expression in T .

6. För var och en av de två generaliserade integralerna, bestäm om den är divergent eller konvergent, och om den är konvergent, vad dess värde är.

6p

For each of the improper integrals, decide if it is divergent or convergent, and if convergent, its value.

(a)

$$\int_1^\infty \frac{3x^5 + 1}{x^7} dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{5x^4 - x^5}{x^{\frac{9}{2}}} dx$$

(Tips/Hint: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$)

(forts.)

III. VG-uppgifter.

7. Bestäm integralen

6p

Evaluate the integral

$$\int_0^1 e^{x+2\ln x} dx$$

8. Bestäm lösningen till differentialekvationen

6p

Find the solution to the differential equation

$$\frac{dy}{dt} = t^7 - t^3 y$$

med begynnelsevärdet $y|_{t=0} = 1$.

with the initial value $y|_{t=0} = 1$.

9. Bestäm lösningen till

6p

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 8 \frac{dy}{dt} + 16y = e^{4t}$$

med begynnelsevärden $y|_{t=0} = 2, \frac{dy}{dt}|_{t=0} = 9$.

Find the solution to the o.d.e. with initial values $y|_{t=0} = 2, \frac{dy}{dt}|_{t=0} = 9$.

Formelsamling Matematik

Trigonometriska identiteter

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(\alpha))^2$$

$$\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}$$

$$\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln(x))^q = 0 \quad (p > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x = e^t$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-qx} = 0 \quad (q > 0)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0 \quad (m \text{ heltal})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0 \quad (q > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Elementära deriveringsregler

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Elementära integreringsregler

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (u = g(x))$$

För dessa regler finns naturligtvis också varianter för obestämda integraler. Eventuella förutsättningar måste naturligtvis vara uppfyllda.

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ (om $a \neq -1$)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$	$-\ln \cos(x) + C$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x + C$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\frac{x \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln x + \sqrt{a+x^2} + C$
$\frac{1}{(\cos(x))^2}$		$\tan(x) + C$
$\frac{1}{(\sin(x))^2}$		$-\cot(x) + C$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x)$ är resttermen av ordning $(n+1)$ som till exempel kan uppskattas med $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där ξ är något tal mellan a och x (vanligtvis vet man inte exakt vilket tal ξ är).

Potensserieutvecklingar

Funktion	Serieutveckling	Konvergensintervall
$(1+x)^a$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \dots$	$-1 \leq x \leq 1$

Geometrisk summa och serie

$$\sum_{k=0}^n ax^k = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots + ax^n = a \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (\text{om } x \neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots = \frac{a}{1-x} \quad (\text{om } |x| < 1)$$