HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

# TENTAMEN

Kurs: Flervariabelanalys G1F, 7,5 hp

Examinationsmoment Salstentamen

Kurskod MA305G

Högskolepoäng för examinationsmomentet

Datum 2024-05-27

Tentamenstid 14:30 – 19:30

Ansvarig lärare Stefan Karlsson

Berörda lärare Konstantinos Tsougkas

Hjälpmedel/bilagor: Formelblad bifogat

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☐ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser, se nästa sida.

**Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar**

*Lycka till!*

Antal sidor totalt 6

HÖGSKOLAN I SKÖVDE *Tentamen i matematik*

**Flervariabelanalys** (MA305G), **6,5 av 7,5 hp** **2024-05-27** kl 14.30-19.30
Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad. Ej räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg godkänt, väl godkänt eller underkänt. För godkänt betyg krävs minst hälften av maxpoängen på uppgift 1–6, 18 poäng, varav minst två poäng från uppgifter tillhörande vart och ett av målen 1, 2, 4, 5. För betyg VG krävs förutom godkänt enligt ovan minst hälften av poängen (totalt) på VG-uppgifterna under 7 samt totalt 28 poäng.

Alla uppgifter ska ha fullständiga och tydliga lösningar som är väl motiverade. Skriv inte lösningarna till flera uppgifter på ett och samma blad. Skriv inte på båda sidor av ett ark.

Målbeskrivningar enligt kursplan, som bedöms på tentamen:

1. ställa upp och analysera matematiska modeller i flera dimensioner med hjälp av vektorvärda funktioner,
2. beräkna de partiella derivatorna till funktioner av flera variabler och analysera sådana funktioner med hjälp av deras partiella derivator,
4. lösa optimeringsproblem som innefattar funktioner av mer än en variabel,
5. beräkna multipelintegraler,
6. redogöra för definitioner och centrala resultat för området,
7. förklara behovet av förutsättningarna i de satser som presenteras i kursen.

Mål 6 och 7 bedöms utifrån hur förutsättningar, definitioner och resultat används och motiveras i sitt sammanhang.

*Konvention för vektorer.* En vektor, eller ett vektorfält, med komponenter $P, Q, R$ i koordinataxlarnas riktningar kan anges som $\langle P, Q, R\rangle$ eller $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, där $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ är ortogonala enhetsvektorer i koordinataxlarnas riktningar enligt högerhandsregeln, i tre dimensioner och motsvarande för två dimensioner med $\langle P, Q\rangle = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

1. (Mål 2) (6p)

Låt

$$f(x, y) = x^2y - xy^3 + e^{(x-2)(y-1)}$$

(a) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till den nivåkurva till $f(x, y)$ som passerar punkten $(x, y) = (2, 1)$.

(b) Bestäm riktningsderivatan $Df_{\mathbf{v}}(2, 1)$ i riktning $\mathbf{v} = (1, 1)$.

(c) För $g(t) = f(x(t), y(t))$, bestäm värdet av derivatan $g'(0)$, givet att

$$x(t) = 2 + \sin 3t \qquad y(t) = e^t.$$

2. (Mål 4) (6p)

Låt

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x$$

(a) Måste $f(x, y)$ anta ett största och ett minsta värde på området

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}?$$

Motivera i så fall att så är fallet, och bestäm dessa extremvärden, och var de antas.

(b) Antar $f(x, y)$ ett största och/eller minsta värde på $\mathbb{R}^2$? Vad är de i så fall dessa extremvärden, och var antas de?

3. (Mål 5) (6p)

(a) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$$

över området

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq x \leq y\}.$$

(b) Bestäm värdet av kurvintegralen

$$\int_C (x + y)\, ds$$

där $C$ är linjen mellan punkterna $(1, 1)$ och $(2, 4)$.

4. (Mål 5) (6p)

(a) Beräkna integralen

$$\iiint_K x\, dV$$

där $K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ och $dV = dxdydz$ är volymelementet.

(b) Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

där $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}$.

5. (Mål 1) (6p)

(a) Är vektorfältet

$$\mathbf{F} = (3x^2y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^3 + 4yx)\mathbf{j}$$

konservativt? I så fall beräkna dess potential.

(b) Beräkna

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

längs kurvan $C$ där $C$ är triangeln med hörn $(0, 0), (2, 4), (0, 5)$ orienterad moturs.

6. (Mål 1) (6p)

(a) Ge ett exempel på en funktion $f(x, y, z)$ sådan att ytintegralen $\iint_Y f\, dS = 1$ där $Y$ är ytan av en rektangulär låda med längd 2, bredd 2 och höjd 1.

(b) Bestäm flödesintegralen (ytintegralen)

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^y + z^2 + x^3)\mathbf{i} + (\sin(xz) + y^3)\mathbf{j} + (e^{xy} + 1)\mathbf{k}$$

ut genom begränsningsytan $Y$ till cylindern

$$K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

7. (VG-uppgifter)

(a) (3p)

Låt $\mathbf{F} = (y, -x, yx^3)$ vara ett vektorfält och låt $S$ vara den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $xy$-planet, orienterad uppåt. Använd Stokes' sats för att beräkna ytintegralen $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

(b) (3p)

Beräkna arean begränsad av kurvorna $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ där $x > 0, y > 0$.

Lycka till!

# Formelsamling Matematik

## Trigonometriska identiteter

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha)=(\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2=2(\cos(\alpha))^2-1=1-2(\sin(\alpha))^2$

$(\cos(\frac{\alpha}{2}))^2=\frac{1+\cos(\alpha)}{2}$

$(\sin(\frac{\alpha}{2}))^2=\frac{1-\cos(\alpha)}{2}$

## Standardgränsvärden

| | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ | $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{t}{x})^x=e^t$ | $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ |
| $\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x}=0 \quad (a>1)$ | $\lim_{x\to\infty}x^pe^{-qx}=0 \quad (q>0)$ | $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))^p}{x^q}=0 \quad (q>0)$ |
| $\lim_{x\to 0^+}x^p(\ln(x))^q=0 \quad (p>0)$ | $\lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!}=0$ (m heltal) | |
| $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ | $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \quad (a>0)$ | $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ |

## Binomialsatsen

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

## Elementära deriveringsregler

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

$(cf(x))'=cf'(x)$

$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

## Elementära integreringsregler

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b(cf(x))dx=c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b(f(x)g'(x))dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b(f(g(x))g'(x))dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du \qquad (u=g(x))$$

För dessa regler finns naturligtvis också varianter för obestämda integraler. Eventuella förutsättningar måste naturligtvis vara uppfyllda.

## Elementära derivator och integraler

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|
| $x^a$ | $ax^{a-1}$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}+C(\text{ om } a\neq -1)$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ | $\ln(x)+C$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x+C$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x}$ | $x\ln\lvert x\rvert-x+C$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\cos(x)+C$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\sin(x)+C$ |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert+C$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{-1}{1-x^2}$ | $x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ |
| $a^x$ | $a^x\ln(a)$ | $\frac{1}{\ln(a)}a^x+C$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{x\ln(a)}$ | $\frac{x\ln(x)-x}{\ln(a)}$ |
| $\frac{1}{a^2+x^2}$ | | $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | | $\arcsin\frac{x}{a}+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$ | | $\ln\lvert x+\sqrt{a+x^2}\rvert+C$ |
| $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | | $\tan(x)+C$ |
| $\frac{1}{(\sin(x))^2}$ | | $-\cot(x)+C$ |

## Taylors formel

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x)$$

där $R_{n+1}(x)$ är resttermen av ordning (n+1) som till exempel kan uppskattas med $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ där $\xi$ är något tal mellan $a$ och $x$ (vanlligtvis vet man inte exakt vilket tal $\xi$ är).

## Potensserieutvecklingar

| **Funktion** | **Serieutveckling** | **Konvergensintervall** |
|---|---|---|
| $(1+x)^a$ | $1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots$ | $-1<x<1$ |
| $e^x$ | $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\frac{x^n}{n!}\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)$ | $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\ldots$ | $-1<x\leq 1$ |
| $\sin(x)$ | $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos(x)$ | $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\arctan(x)$ | $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\ldots$ | $-1\leq x\leq 1$ |

## Geometrisk summa och serie

$$\sum_{k=0}^{n}ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots ax^n=a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad(\text{om } x\neq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}ax^k=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots=\frac{a}{1-x}\quad(\text{om } \lvert x\rvert<1)$$