



Institutionen för ingenjörsvetenskap

## TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra - geometriska transformationer G1N, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA304G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2023-09-22

Skrivtid: 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor : Miniräknare (av enklare slag). Formelblad bifogas.

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
  - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
  - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
  - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
  - ☒ Numrera lösbladen löpande.
  - ☒ Använd inte röd penna.
  - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

**Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar**

*Lycka till!*

Antal sidor totalt 4

## MA304G Linjär algebra - geometriska transformeringar

Tentamensdag: 2023-09-22

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad och miniräknare av enklare slag.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

Om inte annat anges i en uppgift, så antas alla koordinater vara angivna med avseende på en ON-bas.

1. (a) Vad är värdet av skalärprodukten  $(a - 2b) \cdot (a + 3b)$  givet att  $a$  och  $b$  två vektorer sådana att  $\|a\| = 2$ ,  $\|b\| = 3$  och  $a \cdot b = 4$ ?
- (b) Vi vill dela upp en vektor  $v$  i två ortogonala komponenter  $v_1$  och  $v_2$  så att  $v = v_1 + v_2$  där  $v_1$  är parallell med en given vektor  $w$  och  $v_2$  är ortogonal mot  $w$ . Om

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bestäm koordinaterna för  $v_1$  och  $v_2$ .

- (c) Bestäm, i 3D-rummet, koordinaterna för en vektor som är ortogonal mot planet som innehåller punkterna  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (2, 1, 0)$  och  $C = (1, 1, 2)$ .

2. Antag att

$$AX = BX + C \tag{1}$$

där  $A$  och  $B$  är kvadratiske matriser och  $C$  och  $X$  av kompatibla typer.

- (a) Vad finns det för villkor på matriserna för att  $X$  ska vara entydigt bestämd av ekvation (1), och vad blir då  $X$  uttryckt i de övriga matriserna?

- (b) Om  $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , beräkna  $X$ .

3. Låt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Går det att hitta lösningar till följande ekvationssystem (dvs bestämma koefficienterna i linjärkombinationerna)? Bestäm i så fall den allmänna lösningen (alla möjliga lösningar).

- (a)  $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b_1$
- (b)  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b_1$
- (c)  $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b_2$
- (d) Är vektorerna  $\{v_1, v_2, v_3\}$  linjärt oberoende eller linjärt beroende? Motivera.

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna matrisinversen  $A^{-1}$ , om  $A$  är inverterbar, annars visa att  $A$  inte är inverterbar.

(b) Om  $XA = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , är då matrisen  $X$  entydigt bestämd? Beräkna i så fall  $X$ .

5. (a) Bestäm matrisen som för homogena koordinater för 3D-rummet (som kolonnmatrix) beskriver följande avbildning.

Rotera med vinkeln  $\theta$  kring  $z$ -axeln, translatera sedan med vektorn  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$  och spegla slutligen i  $xz$ -planet.

(b) Vad är koordinaterna (beroende på  $c = \cos \theta, s = \sin \theta, d_x, d_y, d_z$ ) för den punkt som punkten  $(1, 1, 1)$  avbildas på?

(c) Vad ska translationsvektorn  $\mathbf{d}$  vara (beroende av vinkeln  $\theta$ ) för att punkten  $(0, 0, 0)$  ska avbildas på sig själv?

6. Ett företag köper och säljer varor. Vara A köps till 10 tkr (tusen kronor) per enhet och säljs för 30 tkr per enhet. Vara B köps till 20 tkr (tusen kronor) per enhet och säljs för 40 tkr per enhet. Vara C köps till 30 tkr (tusen kronor) per enhet och säljs för 70 tkr per enhet. Antag att företaget har

(1) köpt totalt  $S$  enheter av alla varorna,

(2) betalat totalt en miljon kr (1000 tkr) och

(3) sålt allt för totalt 2,4 miljoner kr (2400 tkr).

(a) Sätt upp ett ekvationsystem för hur mycket av respektive vara som köpts och sålts. Beteckna förslagsvis kvantiteterna med  $x_1, x_2, x_3$  och formulera systemet som en matrisekvation.

(b) Beräkna hur mycket varje vara omsatts, som funktion av totala kvantiteten  $S$ .

(c) För vilka värden på  $S$  är alla varukvantiteterna större än eller lika med noll, så att lösningarna blir relevanta i problemställningen?

Lycka till! /SK

Antag att  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  i ON-bas-koordinater.

Antag också att  $\vartheta$  är vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  samt att  $c$  är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Addition,<br>Multiplikation med skalär | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Skalärprodukt                          | $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$<br>$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$<br>$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$<br>$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Längd, norm                            | $\ \mathbf{v}\  = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\  =  c  \ \mathbf{v}\ $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Projektion                             | $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Vektorprodukt<br>(Kryssprodukt)        | $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$<br>$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$<br>$\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\  = \pm \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \sin \vartheta = \pm \text{Arean av den parallelogram som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}$<br>$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$<br>$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ |
| Trippelprodukt                         | $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Determinant $2 \times 2$               | $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Determinant $3 \times 3$               | $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |