

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra - geometriska transformationer G1N, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA304G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2024-09-27

Skrivtid: 8:30 – 12:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor : Miniräknare (av enklare slag). Formelblad bifogas.

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt 4

MA304G Linjär algebra - geometriska transformer

Tentamensdag: 2024-09-27

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver bifogat formelblad och miniräknare av enklare slag.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda betygsgränser för kursmålen.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

Om inte annat anges i en uppgift, så antas alla koordinater vara angivna med avseende på en ON-bas.

1. (a) Vad är värdet av skalärprodukten $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$ givet att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ två vektorer sådana att $\|\mathbf{a}\| = 4$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ och $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$?
- (b) Vi vill dela upp en vektor $\mathbf{v}$ i två ortogonala komponenter $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ så att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ är parallell med en given vektor $\mathbf{w}$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{w}$. Om

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

- (c) Bestäm, i 3D-rummet, koordinaterna för en vektor som är ortogonal mot planet som innehåller punkterna $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ och $C = (1, 2, 3)$.

2. Antag att

$$XA + C = XB + D \tag{1}$$

där A och B är kvadratiske matriser och C och X av kompatibla typer.

- (a) Vad finns det för villkor på matriserna för att X ska vara entydigt bestämd av ekvation (1), och vad blir då X uttryckt i de övriga matriserna?

(b) Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, beräkna X .

3. Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix},$$

Går det att hitta lösningar till följande ekvationssystem (dvs bestämma koefficienterna i linjärkombinationerna)? Bestäm i så fall den allmänna lösningen (alla möjliga lösningar).

- (a) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_1$
- (b) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_1$
- (c) $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}_2$
- (d) Är vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende eller linjärt beroende? Motivera.

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna matrisinversen A^{-1} , om A är inverterbar, annars visa att A inte är inverterbar.

(b) Om $AX = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, är då matrisen X entydigt bestämd? Beräkna i så fall X .

5. (a) Bestäm matrisen som för homogena koordinater för 3D-rummet (som kolonnmatrix) beskriver följande avbildning.

Spegla först i xy -planet, translatera sedan med vektorn $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ och spegla slutligen i yz -planet.

(b) Vad är koordinaterna (beroende på d_x, d_y, d_z) för den punkt som punkten med koordinater (x, y, z) avbildas på?

(c) Vad ska translationsvektorn $\mathbf{d}$ vara för att punkten $(1, 1, 1)$ ska avbildas på sig själv?

6. Ett företag tillverkar delar till en produkt med tre olika typer av maskiner. Maskintyp A tillverkar 1000 delar per dag, maskintyp B tillverkar 2000 delar per dag och maskintyp C tillverkar 3000 delar per dag.

Med totalt 100 maskiner, hur många maskiner kan man ha av varje typ för att tillverka precis 185 000 delar på en dag?

(a) Sätt upp ett ekvationsystem för hur många maskiner man kan ha av respektive typ. Beteckna förslagsvis kvantiteterna med x_A, x_B, x_C och formulera systemet som en matrisekvation.

(b) Bestäm den allmänna lösningen till problemet på parameterform.

(c) Vi förutsätter att vi har hela icke-negativa antal av varje typ av maskin. Vad blir då den specifika lösningen så att vi har så få som möjligt av maskintyp B?

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \pm \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \pm \text{Areal av den parallelogram som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$