

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra I G1F, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA302G

Högskolepoäng för tentamen: 2p

Datum: 2024-12-12

Skrivtid: 8:15 – 12:30

Ansvarig lärare: Yohannes Aklilu

Hjälpmedel/bilagor : Studentens miniräknare, Högskolans miniräknare, formelblad bifogas

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: 2024-12-12 kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Höskolans eller studentens Räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1–6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 27 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Given punkterna $A(2, -1, 3)$ och $B(1, -1, 5)$, och linjen $L : \begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 1 + 2\lambda, \end{cases}$.
- Avgör om linjen genom A och B skär linjen L . Motivera ditt svar.
 - Bestäm ekvationen för planen genom linjen L och punkten B . Ange svaret i parameterfri form.

- (b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\| = 4\sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ och $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -2$. Bestäm skalärprodukten

$$(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \bullet (2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}).$$

2. (a) Antag att A , B och X är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$XA^{-1} + B^t = XB^{-1}$$

Lös algebraiskt ut X ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen X om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Given linjen $L : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$. Ange ett linjär ekvationssystem med tre variabler och tre ekvationer med lösningsmängd som linjen L . Motivera ditt svar.

- (b) Lös följande linjär ekvationssystemet med en valfri lösningsmetod.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 9, \\ x + 4y - z = -5, \\ 2x - y + 4z = 23, \end{cases}$$

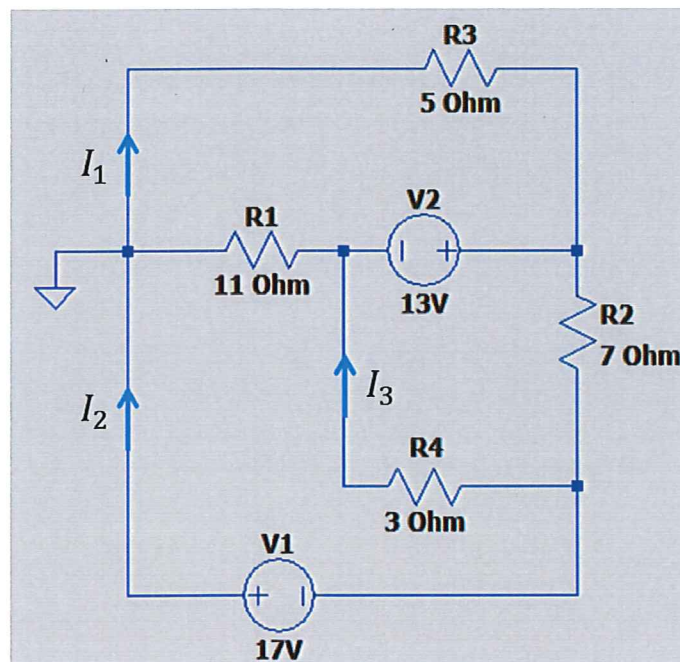
4. Given vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i rummet $\mathbb{R}^3$.

(a) Dela upp vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i två ortogonala komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ där

- $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}_1$.
- $\mathbf{b}$ är ortogonal mot både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

(b) Bestäm konstanten k så att punkterna $A(0, 1, 3)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, -1, 4)$ och $D(3, k, -1)$ ligger i samma plan.

5. Du är given elkretsen i Figuren nedan.



Figur 1: Uppgift 5

Du vill bestämma strömmarna I_1 , I_2 och I_3 , och med hjälp av Kirchhoffs spänningslag (KU) fick du fram till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} (-R_1 - R_3)I_1 + R_1I_2 = V_2, \\ R_1I_1 - (R_1 + R_4)I_2 + R_4I_3 = -V_1, \\ R_4I_2 - (R_2 + R_4)I_3 = -V_2, \end{cases}$$

- (a) Använd numeriska värdena angiven i Figuren och skriv linjära ekvationssystemet med I_1 , I_2 och I_3 som variabler.
- (b) Bestäm strömmarna I_1 , I_2 och I_3 .

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & c & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm konstanten c så att matrisen A inte är inverterbart.
(b) Välj en konstant c så att matrisen A blir inverterbart. Lös sedan matrisekvationen

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lycka till! /YA

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \text{Arean av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$