

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Linjär algebra I G1F, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA302G

Höskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2024-10-24

Skrivtid: 8:15 – 12:30

Ansvarig lärare: Yohannes Aklilu

Hjälpmedel/bilagor : Studentens miniräknare, Högskolans miniräknare, formelblad bifogas

Övrigt

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: 2024-10-24 kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Högskolans eller studentens Räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1–6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 27 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Given planen $\pi_1 = 2x - y - 2z = 3$ och $\pi_2 : x + 2y + 4z = 1$.
 - i. Beräkna vinkeln mellan planen. Ange svaret i grader.
 - ii. Bestäm ekvationen för planens skärningslinje. Ange svaret i parameterform.
- (b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$. Bestäm normen (dvs. längden) av vektorprodukten

$$(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}).$$

2. (a) Antag att A , B och X är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$2XB^{-1} - AB = A^{-1}.$$

Lös algebraiskt ut X ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen X om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestäm alla vektorer i $\mathbb{R}^5$ som är ortogonala mot de tre vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -7 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- (b) För vilket/vilka värden på k (om det finns) har ekvationssystemet nedan entydig lösning, oändliga många lösningar, eller saknar lösning?

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 4y - z = k, \\ 2x - y + 4z = k^2, \end{cases}$$

4. Given vektorerna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i rummet $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en ortonormalbasis (ON-bas) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ för $\mathbb{R}^3$ som uppfyller följande villkor.

- $\mathbf{e}_1$ är parallell med $\mathbf{u}$.
- $\mathbf{e}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$.
- $\mathbf{e}_3$ är ortogonal mot var och en av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(b) Avgör om alla vektorer $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas som linjär kombination av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I så fall bestäm skalär $a, b, c \in \mathbb{R}$ sådana att $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{w}_3$.

5. Du har en firma som, designar, tillverkar och säljer likströmsmotorer. I dessa ingår det tre komponenter A, B och C. Du har kontaktat tre leverantörer och du fick offert enligt tabellen nedan:

	Komponent A (kr/st)	Komponent B (kr/st)	Komponent C (kr/st)
Offert 1	20	30	10
Offert 2	40	20	50
Offert 3	30	60	20

Du vill ha en leverantör till alla tre komponenter, och du fick ett offert på 5800kr, 9300kr respektive 10700kr.

- (a) Sätt upp ett ekvationssystem för antalet komponenter av respektive typ som du vill köpa.
 (b) Beräkna hur många komponenter vill du köpa av varje typ.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna matrisinversen A^{-1} , om A är inverterbar, annars visa att A är inte inverterbart.

(b) Om $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, är då matrisen entydigt bestämd? Beräkna i så fall X .

Lycka till! /YA

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \text{Arean av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$