



HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Försättsblad med
information till skrivvakt

Institutionen för ingenjörsvetenskap

Kurs Linjär algebra I G1F, 3 hp

Prov Salstentamen

Kurskod MA302G

Högskolepoäng för tentamen 2

Datum 2023-12-15

Skrivtid 8:15 – 12:30

Jourhavande lärare Yohannes Aklilu

Mob 0763135922

Besöker skrivningen ☐ Ja, ca 10:00
☒ Nej

Hjälpmedel och övriga upplysningar till skrivvakter

Miniräknare ☒ Högskolans miniräknare
☐ Studentens miniräknare
☐ Ej tillåten

Skrivpapper ☐ Linjerat
☒ Rutat

Vid egen uppkopiering ange antalet kopior _____

Anvisningar till lärare

Alla tentamensformulär ska lämnas in på reprocentralen.

- **För kopiering av tentamen** ska inlämning av originalexemplar ske senast 6 arbetsdagar före tentamenstillfället. Antal exemplar som ska kopieras upp fylls i av reprocentralen i rutan nedan.
- **Färdigkopierad tentamen** ska lämnas in senast 3 arbetsdagar före tentamenstillfället. Meddela tentamensadministrationen i god tid när inlämningen kommer att ske. Tentamen överlämnas direkt till personal på reprocentralen (ej via internpost). Vid egen uppkopiering ange antalet kopior i rutan ovan.

Inlämning ska ske på reprocentralens öppettider.

FYLLS I AV ADMINISTRATIONEN

Antal uppkopierade exemplar 12

Antal anmälda _____

MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: 2023-12-15 kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver högskolans räknedosor.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1–6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 27 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Bestäm alla vektorer med längden 1 som är parallell med linjen genom punkterna $A = (-1, 3, 2)$ och $B = (2, 1, -3)$.

(b) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att $|\mathbf{u} + 3\mathbf{v}| = 8$, $|\mathbf{u}| = 2$ och $|\mathbf{v}| = 3$. Bestäm
 - i. skalär produkten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
 - ii. cosinus av vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
2. (a) Antag att A , B och X är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$XB^{-1} + AB = A^{-1}.$$

Lös algebraiskt ut X ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen X om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Lös ekvationssystemet med en valfri lösningsmetod

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x + 5y - 4z = -2, \end{cases}$$

- (b) Bilda ett ekvationssystem med 3 variabler och 2 ekvationer som har lösningar

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Förutom ekvationssystemet ska svaret även innehålla en korrekt motivering för att ekvationssystemet har lösningarna ovan.

4. (a) Dela upp vektorn $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i två vinkelräta komponenter så att
 - den ena komponent är ortogonal mot planet $\pi : x + 2y - 3z = 0$.
 - den andra komponent är parallell med planet.

Använd detta för att bestämma avståndet mellan planet π och punkten $P = (2, 1, -1)$.

(b) Visa att vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

är linjärt beroende.

5. En bilfirma vill redovisa bilförsäljningen under de senaste tre kvartalen. Bilfirman kategoriserar bilarna enligt drivmedel de använder som Besin, Diesel eller El och priserna per bil för varje kategori antas vara samma. Tabellen nedan visar antal sålda bilar för var och en av kategorier:

	Besin	Diesel	El
Kvartal 1	30	20	40
Kvartal 2	25	10	60
Kvartal 3	30	20	70

Under de tre kvartalen har bilfirmans totala intäkter efter moms blev 30 miljon kr, 34 miljon kr, och 42 miljon kr.

- (a) Sätt upp ett ekvationssystem för priset på bilarna i varje kategori.
(b) Beräkna priset på bilarna i varje kategori.

(OBS: Det är viktigt att du väljer lämpligt värde på pris/bil för att undvika stora siffror på ekvationssystemet. Du kan t.ex. välja pris/bil i miljon kr, eller i hundrausentals kr.)

6. Given matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) För vilket värdet på konstanten a är matrisen A inte inverterbar.
(b) Välj ett lämpligt a -värdet så att matrisen A blir inverterbar. Du får välja talet själv. Lös sedan

matrisekvationen $AX = B$ där $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Lycka till! /YA

Antag att $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i ON-bas-koordinater.

Antag också att ϑ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt att c är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

Addition, Multiplikation med skalär	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$
Skalärprodukt	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Längd, norm	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\ = c \ \mathbf{v}\ $
Projektion	$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Vektorprodukt (Kryssprodukt)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \vartheta = \text{Arean av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Trippelprodukt	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$