

## MA302G Linjär algebra I

Tentamensdag: 2023-10-20 kl 8.15-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver högskolans räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål.

Varje avdelning (1-6) bedöms med upp till sex poäng. För betyg G krävs minst 18 poäng totalt, för betyg VG minst 27 poäng.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (a) Bestäm alla vektorer med längden 1 som är ortogonala med planet genom punkterna  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (-2, 0, 3)$  och  $C = (-1, 1, 1)$ .  
  
(b) Låt  $ABC$  vara en liksidig triangel med sidan 2 i.e.. Sätt  $\mathbf{u} = \vec{AB}$  och  $\mathbf{v} = \vec{AC}$ . Bestäm cosinus av vinkeln mellan vektorerna  $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$  och  $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ .  
(OBS:  $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  och  $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ .)
2. (a) Antag att  $A$ ,  $B$  och  $X$  är kvadratiske matriser som uppfyller ekvationen

$$(AX - B)^{-1} = B.$$

Lös algebraiskt ut  $X$  ur ekvationen, givet att det finns en entydig lösning.

- (b) I ekvationen ovan, bestäm matrisen  $X$  om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Lös ekvationssystemet med en valfri lösningsmetod

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 9, \\ 2x - y + z = 0, \\ 4x - y - z = 2, \end{cases}$$

- (b) Bilda ett ekvationssystem med 3 variabler och 3 ekvationer som har oändligt många lösningar. Förutom ekvationssystemet ska svaret även innehålla en korrekt motivering för att ekvationssystemet har oändligt många lösningar.

4. Given vektorerna  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  i rummet  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Bestäm en ortonormalbasis (ON-basis)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  för  $\mathbb{R}^3$  som uppfyller följande villkor.
  - $\mathbf{e}_1$  är parallell med  $\mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{e}_2$  är ortogonal mot  $\mathbf{v}$ .
  - $\mathbf{e}_3$  är ortogonal mot var och en av vektorerna  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ .

- (b) Visa att vektorerna

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

är linjärt oberoende.

5. Ett byggfirma ingår ett samarbetsavtal med en målare, en rörmokare och en elektriker. Enligt avtalet kommer byggfirman betala månadsvis för utförde arbete, medan målaren, rörmokaren och elektrikererna gör sina redovisningar timvis. Tabellen nedan visar antal timmar de arbetade under första tre månaderna.

|            | Månad 1 | Månad 2 | Månad 3 |
|------------|---------|---------|---------|
| Målare     | 20      | 10      | 15      |
| Rörmokare  | 25      | 20      | 18      |
| Elektriker | 30      | 20      | 36      |

Under de tre månaderna har byggfirman betalat sammanlagt 40750 kr, 27500 kr, och 38250 kr.

- (a) Sätt upp ett ekvationssystem för timpriset av målaren, rörmakaren, och elektriker.  
(b) Beräkna timpriset för målaren, rörmakaren, och elektriker.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) För vilket värde på  $a$  är matrisen  $A$  inte inverterbart?  
(b) Betrakta ett  $a$ -värde där matrisen  $A$  är inverterbart. Du får välja ett lämpligt  $a$  värde. Bestäm sedan matrisinversen.

Lycka till! /YA

Antag att  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$  och  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  i ON-bas-koordinater.

Antag också att  $\vartheta$  är vinkeln mellan  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  samt att  $c$  är ett godtyckligt reellt tal. Då gäller

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Addition,<br>Multiplikation med skalär | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{v} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Skalärprodukt                          | $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \cos \vartheta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$<br>$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$<br>$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$<br>$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ samt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Längd, norm                            | $\ \mathbf{v}\  = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \quad \ c\mathbf{v}\  =  c  \ \mathbf{v}\ $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Projektion                             | $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Vektorprodukt<br>(Kryssprodukt)        | $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$<br>$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$<br>$\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\  = \ \mathbf{u}\  \ \mathbf{v}\  \sin \vartheta = \text{Arean av parallelogrammen som spänns upp av } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$<br>$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}, \quad (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$<br>$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ |
| Trippelprodukt                         | $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Volymen (med tecken) av den parallelepiped som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ och } \mathbf{w}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Determinant $2 \times 2$               | $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Determinant $3 \times 3$               | $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |