

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: **Linjär algebra II G1F, 3 hp**

Examinationsmoment: 1001 – Salstentamen

Kurskod: **MA301G**

Högskolepoäng för examinationsmomentet: 2

Datum: **2024-01-26**

Tentamenstid 14:15 – 18:30

Ansvarig lärare: Stefan Karlsson

Berörda lärare: Stefan Karlsson, Yohannes Aklilu

Hjälpmedel/bilagor: Inga hjälpmedel utöver skrivdon och högskolans miniräknare.

Formelblad bifogas.

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser: Se ingressen till uppgiftsbladet.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

MA303G Linjär algebra II

Tentamensdag: 2024-01-26 kl 14.15-18.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel utöver högskolans räknedosa.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U), utifrån hur väl inlämnade lösningar visar på uppfyllda kursmål. Varje avdelning kan ge upp till 6 poäng, för godkänt betyg krävs minst 20 poäng på 1-5, för väl godkänt betyg minst 30 poäng totalt.

Lämna fullständiga lösningar till alla uppgifter, om inte annat anges. Skriv inte mer än en uppgift på varje blad.

1. (*Bas och basbyte*)

(a) Låt $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, där $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

i. Avgör om V spänner upp vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

ii. Motivera varför V utgör *inte* en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestäm rangen och nulldimensionen för matrisen M där

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (*Bas och linjär avbildning i olika baser*)

Låt $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en ON-bas för vektorrummet $\mathbb{R}^3$. Definiera en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ med

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm bilden $(T(\mathbf{v}))_E$ för vektorn $(\mathbf{v})_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Bestäm matrisen $\left(T\right)_E^E$ för avbildningen T med avseende på baserna E .

- (c) Bestäm matrisen $\begin{pmatrix} T \end{pmatrix}_H^G$ för avbildningen T med avseende på baserna $G = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ och $H = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ där

$$\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

och

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

(Observera att both G och H utgör en bas för rummet $\mathbb{R}^3$.)

3. (Determinant)

- (a) För matrisen A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gäller att $\det(A) = 4$. Bestäm determinanten för matriser B och C där

$$B = \begin{pmatrix} 2a & -3b \\ 2c & -3d \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

- (b) Bestäm determinanten för matrisen $2M$ där

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (Egenvärden, egenvektorer och diagonalisering)

Given matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm

- (a) alla egenvärden till matrisen A .
- (b) egenvektorerna till matrisen A med tillhörande egenvärden.
- (c) Bestäm, om möjligt, en diagonal matris D och en inverterbar matris P sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

5. (Egenvärden, egenvektorer)

För en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gäller att

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm avbildningens egenvärden (hur många egenvärden har den?) och respektive egenvektorer (egenrum).
- (b) Bestäm, om möjligt, en diagonal matris D och en inverterbar matris P sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

6. Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.

Låt $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $G = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ och $H = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ vara baserna för $\mathbb{R}^3$ given på uppgift 2. Antag att

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

är en linjär avbildning sådan att

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}_1) = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{w}_2) = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \quad \text{och} \quad \mathbf{T}(\mathbf{w}_3) = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

- (a) Bestäm avbildningsmatrisen $(\mathbf{T})_G^E$ för $\mathbf{T}$ från E -koordinater (för $\mathbf{v}$) till G -koordinater (för $\mathbf{T}(\mathbf{v})$).
- (b) Bestäm avbildningsmatrisen $(\mathbf{T})_E^H$ för $\mathbf{T}$ från H -koordinater till E -koordinater.
- (c) Bestäm avbildningsmatrisen $(\mathbf{T})_E^E$ för $\mathbf{T}$ från E -koordinater till E -koordinater.

7. Krävs inte för betyg G, räknas in för VG.

Låt $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara linjära avbildningen definieras som spegling genom planet $\pi : x + 2y - z = 0$. Avbildningsmatrisen ges av

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm $P(\mathbf{v})$ där $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (b) Vad har P för egenvektorer? Beskriv dem gärna genom att ange en bas för respektive egenrum.
(Tips: Tolka avbildningen geometriskt för att hitta egenvektorerna.)
- (c) Bilda en bas B för $\mathbb{R}^3$ från egenvektorerna. Bestäm sedan avbildningsmatrisen $(\mathbf{P})_B^B$ för $\mathbf{P}$ med avseende på denna bas.

Notation för koordinater och matriser för avbildningar.

Standardbas för $\mathbb{R}^n$. Med *standardbasen* för $\mathbb{R}^n$ menar vi $(e_1, \dots, e_n)$ där e_k har 1 som k :te komponent, och 0 som övriga komponenter.

Koordinatvektor för en vektor med avseende på en bas. Om $F = (f_1, \dots, f_n)$ är en bas för ett vektorrum V så betecknar $(v)_F$ koordinatvektorn (en vektor i $\mathbb{R}^n$ som en $n \times 1$ -matris) för v med avseende på basen F , dvs $\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix} (v)_F = v$. (I Lemurell skrivs koordinatvektorn för v som v_B , i Andersson V_B .)

Matris för linjär avbildning. Om $T : V \rightarrow W$ är en linjär avbildning, B en bas för vektorrummet V och C en bas för vektorrummet W , så betecknar $(T)_C^B$ matrisen för avbildningen T , dvs

$$(T(v))_C = (T)_C^B (v)_B.$$

Om $V = W$ och $B = C$ kan vi kortare skriva $(T)_B$ för $(T)_B^B$.

(I Lemurell skrivs en avbildningsmatris (där $B = C$) T_B , i Andersson $A_{B,C}$, där sammanhanget ger vilken avbildning matrisen gäller.)

Basbytesmatris. En basbytesmatris från B -koordinater till C -koordinater (B och C baser för samma rum) kan skrivas $(B)_C$, $(\text{id})_C^B$, $A_{C \leftarrow B}$ eller $A_{B \rightarrow C}$.

(I Lemurell används det senare, i Andersson betecknas basbytesmatriser oftast med P där sammanhanget ger mellan vilka baser den byter koordinater.)

Determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \det A_{1,1} - a_{1,2} \det A_{1,2} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

där $A_{i,j}$ är matrisen som fås från A genom att stryka rad i och kolonn j .

Diagonalisering

Om kolonnerna i P är egenvektorer till A så är

$$AP = PD$$

där D är en diagonalmatris.

Lycka till! /YA