HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs Matematik för Ingenjörer II

Delkurs

Kurskod MA128G

Datum 2023-11-27

Högskolepoäng för tentamen 2

Skrivtid 08:15-12:30

Ansvarig lärare Yohannes Aklilu

Berörda lärare

Hjälpmedel/bilagor

Övrigt Hjälpmedel: Bifogat formelblad och linjal

Anvisningar

- [ ] Ta nytt blad för varje lärare
- [ ] Ta nytt blad för varje ny fråga
- [x] Skriv endast på en sida av papperet.
- [x] Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- [x] Numrera lösbladen löpande.
- [x] Använd inte röd penna.
- [x] Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser

G: Minst 18 poäng.
VG: Minst 28 poäng.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

Matematik för Ingenjörer II, MA128G **2023-11-27**, kl 08:15-12:30

Hjälpmedel:

- Bifogat formelblad och linjal

Tentamen bedöms med betyg Väl-godkänd(VG), Godkänd(G) eller Underkänd(U) utifrån hur väl dina lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen. Varje uppgift kan ge upp till 6 poäng, totalt 36. För G krävs totalt minst 18 poäng, för VG minst 28.

För att bli godkänd (G) på en uppgift krävs en redovisning som leder fram till ett korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara kortfattad, men tillräckligt utförlig och uppställd och formulerad så att tankegången lätt kan följas. Ett svar med t.ex. enbart värdet av en uträkning blir underkänt. Numeriska värden kan anges som uttryck, lämpligt förenklade, där rotuttryck, logaritmer och exponentialuttryck kan ingå utöver *rena siffror*, om så behövs.

För att bli Väl-Godkänd (VG) krävs en godkänd redovisning och dessutom välgrundade och nyanserade matematiska resonemang som leder fram till korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara väl formulerat och analyserat, och dra relevanta slutsatser om lösningarnas karaktär på ett logiskt och konsistent sätt.

Kursens mål

Följande mål skall bedöms genom denna examination:

3 hantera funktioner som bildas som kombinationer av elementära funktioner, inklusive gränsvärde och derivata,

4 tillämpa derivata i olika sammanhang som att skissa grafer, analysera olikheter och optimera,

5 tolka matematisk text inom området samt kommunicera resonemang och beräkningar på ett tydligt och förståeligt sätt.

Examinationsuppgifter

Skriv dina lösningar på separat papper. Använd nytt blad för varje upppgift.

1. Bestäm följande gränsvärden. (2pts/uppgift)

   (a) $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2-12}{\sin(x+2)}$.

   (b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+3x-4}{4x^2+5x-2}$.

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3x}-2}$.

2. (3p/uppgift)

   (a) För funktionen f gäller att $f(x) = (2x+1)\cdot e^{ax}$ där a är en konstant. Funktionen har en tangent $y = 5x + 1$ i punkten $x = 0$. Bestäm konstanten a.

   (b) Bestäm konstanterna a och b sådan att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} & om \quad x < 1 \\ ax^2 - b\cos(\pi x) - \frac{1}{2} & om \quad 1 \leq x < 3 \\ x^2 + ax - 2b & om \quad x \geq 3 \end{cases}$$

   är kontinuerlig. Motivera ditt svar.

3. Bestäm derivatan för följande funktioner med valfria deriveringsregler. (2p/uppgift)

   (a) $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}$

   (b) $g(x) = 2^{3x+1} \cdot \tan(3x)$

   (c) $h(t) = \frac{t^2-t}{\sin(2t+1)}$

4. (3p/uppgift)

   (a) Skissa en graf till en kontinuerlig funktion $y = f(x)$ som uppfyller villkoren:

   - $f(-4) = -2$ och $f'(-4) = 0$
   - $f(2) = 3$ och $f'(2) = 0$
   - $f(x) = -1$ för $-3 \leq x \leq -2$
   - $f'(x) = 1$ för $-2 < x < 1$
   - $f'(x) < 0$ för $x < -4$ och för $x > 3$
   - $f'(x) > 0$ för $-4 < x < -3$ samt $1 < x < 2$
   - $f'(x) < 0$ för $-\infty < -4$ samt $x > \infty$

(b) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$.

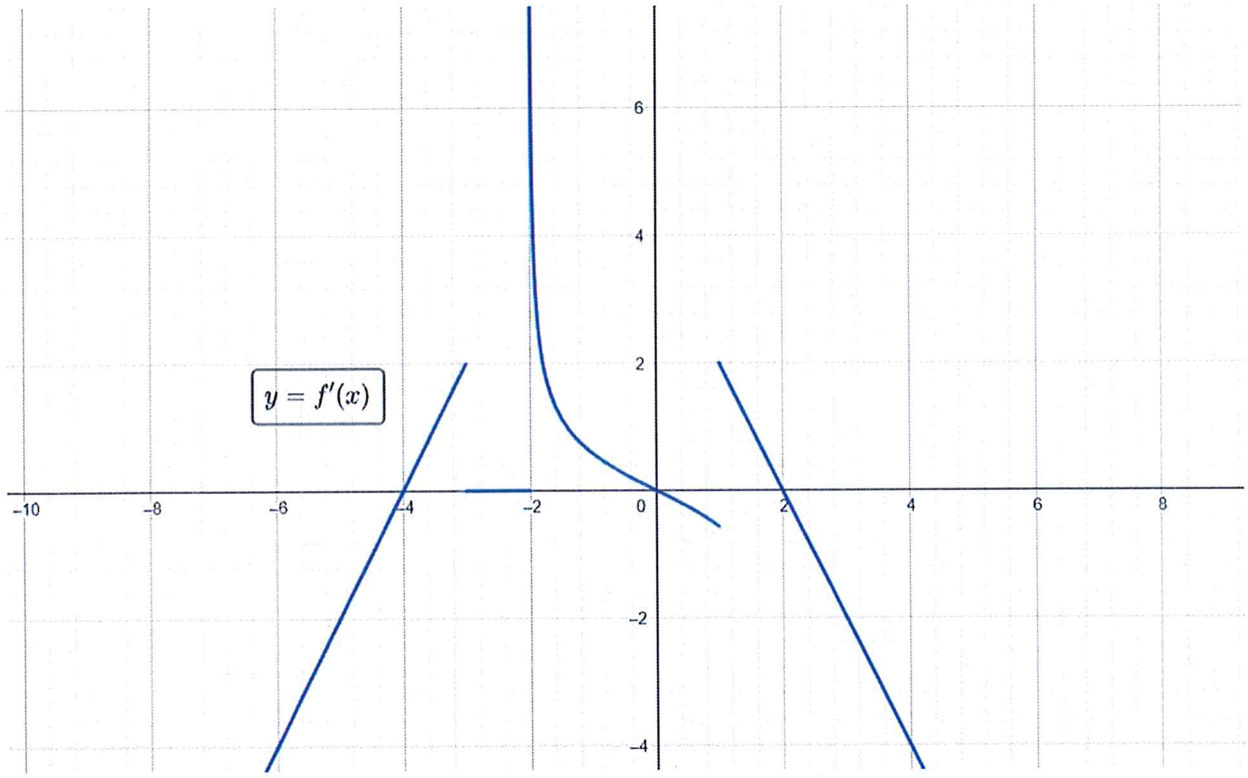
i. Bestäm kurvans vertikala och horisontella asymptoter.

ii. Bestäm med hjälp av derivata intervallen i vilken funktionen växer och/eller avtar.

5. (3p/uppgift)

(a) Bestäm lokala extrempunkter till funktionen $g(x) = (x^2-4)|x-1|$ på intervallet $-2 \leq x \leq 2$.

(b) Figuren visar *grafen för derivatan* till en kontinuerlig funktion $y = f(x)$. Visa i en tabell med derivatans tecken i vilka intervall funktionen växer respektive avtar. Bestäm också koordinaterna för eventuella lokal maximi- och minimipunkter.



Figur 1: Uppgift 5b

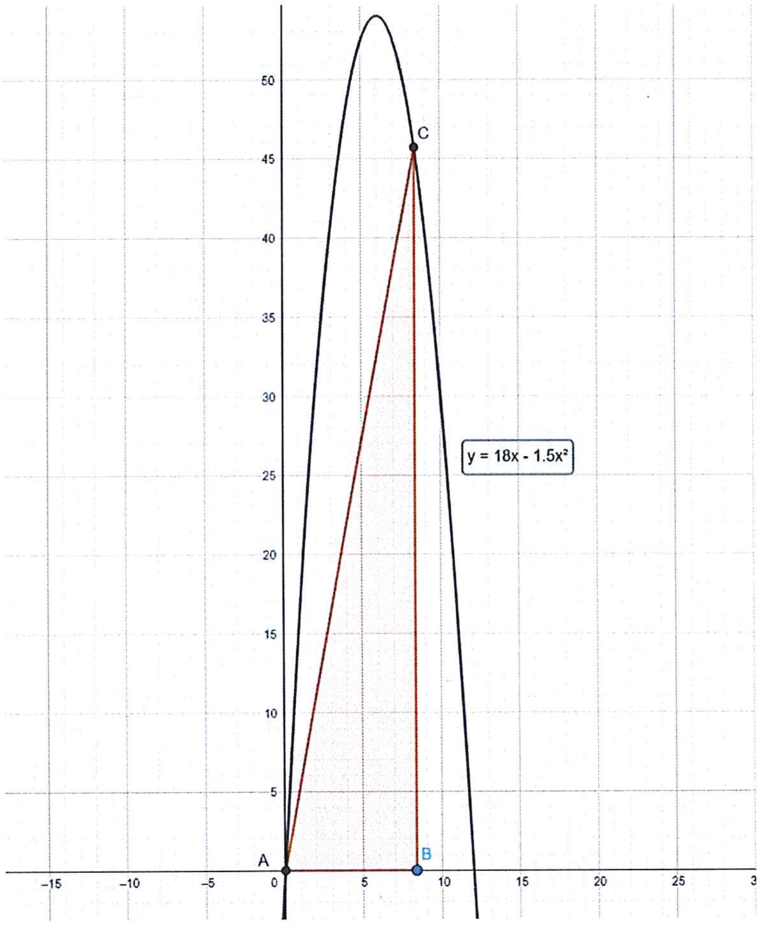
6. (3p/uppgift)

(a) Ett föremål dras längs ett horisontellt plan av en kraft som verkar längs ett rep fäst vid föremålet. Om repet bildar en vinkel v mot planet, så blir storleken på kraften

$$F(v) = \frac{50}{\sin v + \sqrt{3}\cos v}.$$

För vilka värden på v är F den minsta?

(b) Bestäm triangel ABC's maximala area om punkten C ligger på kurvan $y = 18x - \frac{3}{2}x^2$ och $0 \leq x \leq 12$.



Figur 2: Uppgift 6b

En variabel analys

Trigonometriska identiteter

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \ \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \ \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Trigonometriska värden för vinkel v

v [°]	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
v [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	1

Några formler/regler

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har lösning $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Gränsvärdet

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k ,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 .$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0, \qquad (a > 1)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a , \qquad (a > 0).$$

Derivatans definition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivatan för elementärfunktioner samt deriveringsregler	
$f(x)$	$f'(x)$
x^n, där $n \in \mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
e^x e^{kx}, k är konstant.	e^x $k \cdot e^{kx}$
a^x a^{kx}, k är konstant.	$\ln a \cdot a^x$ $\mathrm{k} \cdot \ln a \cdot a^{kx}$
$\ln\lvert x\rvert$ $\ln\lvert kx\rvert$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}$
$\log_{\mathrm{a}} x$ $\log_{\mathrm{a}} kx$	$\frac{1}{x \ln a}$ $\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$ $\sin kx$	$\cos x$ $\mathrm{k} \cdot \cos kx$
$\cos x$ $\cos kx$	$-\sin x$ $-\mathrm{k} \cdot \sin\, kx$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två funktioner.	
$F(x)$	$F'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g\,(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$
$kf(x)$	$kf'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
$f \circ g\,(x) = f(g(x))$	$f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$
$f(kx + m)$	$k \cdot f'(kx + m)$