



Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Matematik för Ingenjörer II, 3 hp

Prov: Salstentamen

Kurskod: MA128G

Högskolepoäng för tentamen: 2

Datum: 2025-02-13

Skrivtid: 14:15 – 18:30

Ansvarig lärare: Yohannes Akilu

Hjälpmedel/bilagor : formelblad bifogas

Övrigt

- Anvisningar
- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
 - ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
 - ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
 - ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - ☒ Numrera lösbladen löpande.
 - ☒ Använd inte röd penna.
 - ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen bedöms med betyg Väl godkänd (VG), Godkänd (G) eller Underkänd (U)

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

Matematik för Ingenjörer II, MA128G

2025-02-13, kl 14:15–18:30

Hjälpmedel:

- Bifogat formelblad och linjal

Tentamen bedöms med betyg Väl-godkänd(VG), Godkänd(G) eller Underkänd(U) utifrån hur väl dina lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen. Varje uppgift kan ge upp till 6 poäng, totalt 36. För G krävs totalt minst 18 poäng, för VG minst 28.

För att få poäng på en uppgift krävs en redovisning som leder fram till ett korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara kortfattad, men tillräckligt utförlig och uppställd och formulerad så att tankegången lätt kan följas. Ett svar med t.ex. enbart värdet av en uträkning blir underkänt. Numeriska värden kan anges som uttryck, lämpligt förenklade, där rotuttryck, logaritmer och exponentialuttryck kan ingå utöver *rena siffror*, om så behövs.

För att bli Väl-Godkänd (VG) krävs en godkänd redovisning och dessutom välgrundade och nyanserade matematiska resonemang som leder fram till korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara väl formulerat och analyserat, och dra relevanta slutsatser om lösningarnas karaktär på ett logiskt och konsistent sätt.

Kursens mål

Följande mål skall bedöms genom denna examination:

- 3 hantera funktioner som bildas som kombinationer av elementära funktioner, inklusive gränsvärde och derivata,
- 4 tillämpa derivata i olika sammanhang som att skissa grafer, analysera olikheter och optimerar,
- 5 tolka matematisk text inom området samt kommunicera resonemang och beräkningar på ett tydligt och förståeligt sätt.

Examinationsuppgifter

Skriv dina lösningar på separat papper. Använd nytt blad för varje uppgift.

1. Låt f och g vara två funktioner och $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ och $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$. Beräkna följande gränsvärden. (2p/uppgift)

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) - 4g(x)]$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} [4f(x) - (x+2)g(x)]$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} [e^{f(x)-2x} - \sin(g(x)\pi)]$.

2. (2p/uppgift)

- (a) Bestäm följande gränsvärden.

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 1}}{3x + 4}$.

ii. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\tan(2x+1)}{4x^2 - 1}$.

- (b) Använd derivatans definition och visa att funktionen

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2-1}$$

inte är deriverbar i punkten $x = 2$.

3. Bestäm derivatan för följande funktioner med valfria deriveringsregler. (2p/uppgift)

(a) $f(t) = \frac{\sqrt[3]{t^4} + t^3}{\sqrt{t}}$

(b) $g(x) = e^{x+3} \cdot \cos(3x+1)$

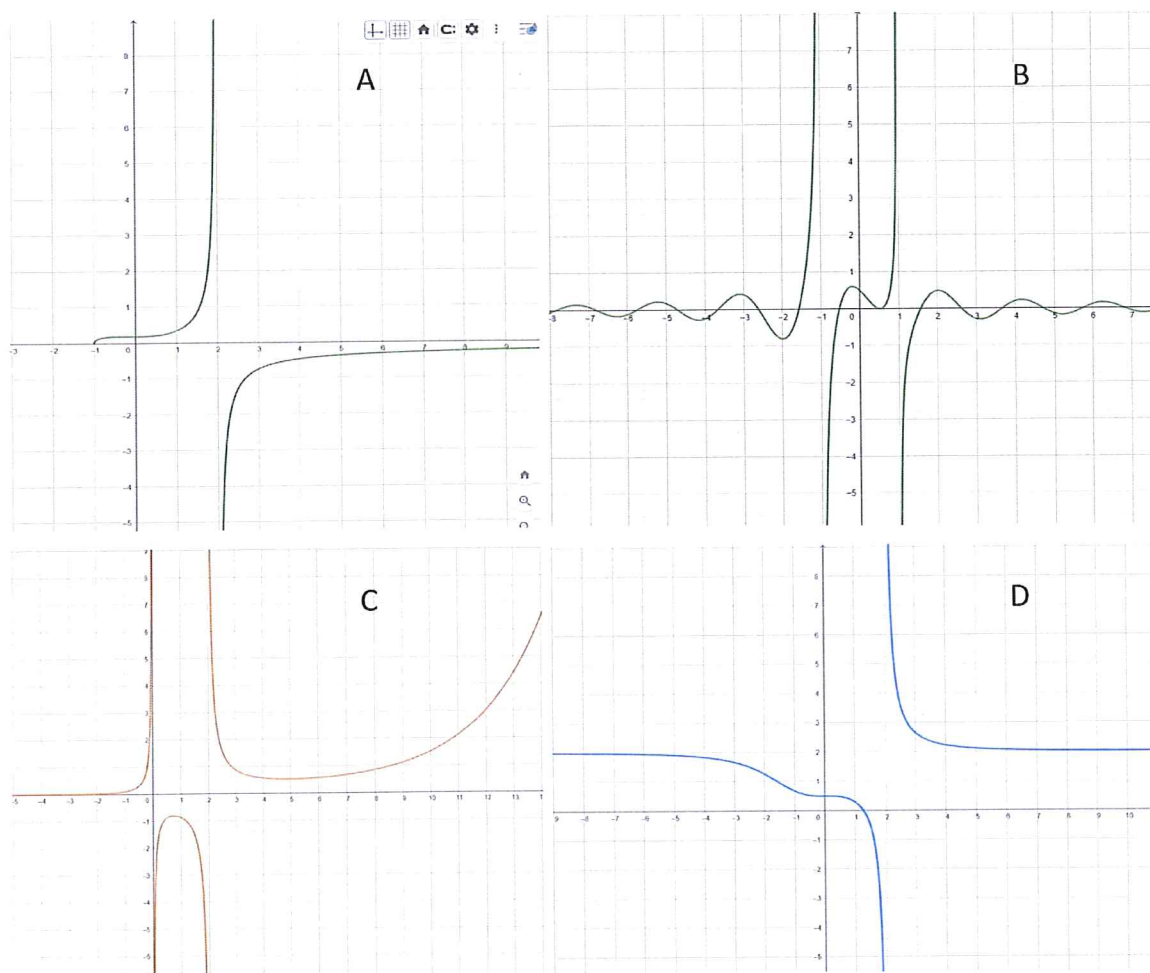
(c) $h(t) = \frac{\sin(2t+1)}{e^{3t}}$

4. (3p/uppgift)

- (a) För funktionen f gäller att $f(x) = 2x \cdot e^{ax}$ där a är en konstant. Funktionen har en tangent som är parallell med x -axeln. Denna tangent sker y -axeln i punkten $(0, -2)$. Bestäm konstanten a .

(b) Figur 4b visar kurvorna till följande funktioner. Matcha, med motivering, vilken kurva tillhör vilken funktion.

- $f(x) = \frac{\cos(3x)(2x-1)}{2x^2-2}$
- $g(x) = \frac{4-2x^3}{8-x^3}$
- $h(x) = \frac{\sqrt{2x^3+2}}{8-2x^2}$
- $l(x) = \frac{3^{0.5x}}{2x^2-4x}$



Figur 1: Uppgift 4b

5.

(3p/uppgift)

(a) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$. Hitta de eventuella vertikala och horisontella asymptoter till grafen för $y = f(x)$.

(b) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2-16}$.

- Bestäm med hjälp av derivata intervallen i vilken funktionen växer respektive avtar.

- ii. Bestäm punkten/punkterna (dvs. x-värden) i vilken funktionens graf har lokala maximi- och minimivärden.

6.

(3p/uppgift)

- (a) Bestäm det största och minsta värdet till funktionen

$$f(x) = \sin x \cdot e^{\cos(2x)}$$

på intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

- (b) En cylindrisk behållare är tänkt att rymma exakt $20\pi \text{ m}^3$. Materialet för lock och botten kostar 100 kr/m^2 . Materialet på sidorna kostar däremot 80 kr/m^2 . Bestäm radien och höjden för den cylinder som ger minimal materialkostnad.

(OBS: Arealen av cylindern (exklusiv basen) med radien r och höjden h är $A_{cy} = 2\pi rh$, och volymen är $V_{cy} = \pi r^2 h$.)

En variabel analys											
Trigonometriska identiteter	$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$										
Trigonometriska värden för vinkel v	$v [^\circ]$	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
	v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
	[rad]										
	$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
Några formler/regler	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\text{Ekvationen } ax^2 + bx + c = 0 \text{ har lösning } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$										
Gränsvärdet	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k,$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0, \quad (a > 1)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0).$										
Derivatans definition	$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$										

Derivatan för elementärfunktioner samt deriveringsregler	
$f(x)$	$f'(x)$
x^n , där $n \in \mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
e^{kx} , k är konstant.	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$\ln a \cdot a^x$
a^{kx} , k är konstant.	$k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln kx $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\log_a kx$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cdot \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \cdot \sin kx$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två funktioner.	
$F(x)$	$F'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$
$kf(x)$	$kf'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$f \circ g(x) = f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(kx + m)$	$k \cdot f'(kx + m)$