

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs Matematik för Ingenjörer II

Delkurs

Kurskod MA128G

Högskolepoäng för tentamen 2

Datum 2024-12-02

Skrivtid 08:15-12:30

Ansvarig lärare Yohannes Aklilu

Berörda lärare Stefan Karlsson

Hjälpmedel/bilagor

Övrigt Hjälpmedel: Bifogat formelblad och linjal

Anvisningar

☐

Ta nytt blad för varje lärare

☐

Ta nytt blad för varje ny fråga

☒

Skriv endast på en sida av papperet.

☒

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.

☒

Numrera lösbladen löpande.

☒

Använd inte röd penna.

☒

Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Poänggränser

G: Minst 18 poäng.

VG: Minst 28 poäng.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

Matematik för Ingenjörer II, MA128G

2024-12-02, kl 08:15–12:30

Hjälpmedel:

- Bifogat formelblad och linjal

Tentamen bedöms med betyg Väl-godkänd(VG), Godkänd(G) eller Underkänd(U) utifrån hur väl dina lösningar visar på uppfyllda betygskriterier för kursmålen. Varje uppgift kan ge upp till 6 poäng, totalt 36. För G krävs totalt minst 18 poäng, för VG minst 28.

För att få poäng på en uppgift krävs en redovisning som leder fram till ett korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara kortfattad, men tillräckligt utförlig och uppställd och formulerad så att tankegången lätt kan följas. Ett svar med t.ex. enbart värdet av en uträkning blir underkänt. Numeriska värden kan anges som uttryck, lämpligt förenklade, där rotuttryck, logaritmer och exponentialuttryck kan ingå utöver *rena siffror*, om så behövs.

För att bli Väl-Godkänd (VG) krävs en godkänd redovisning och dessutom välgrundade och nyanserade matematiska resonemang som leder fram till korrekt svar eller slutsats. Redovisningen ska vara väl formulerat och analyserat, och dra relevanta slutsatser om lösningarnas karaktär på ett logiskt och konsistent sätt.

Kursens mål

Följande mål skall bedöms genom denna examination:

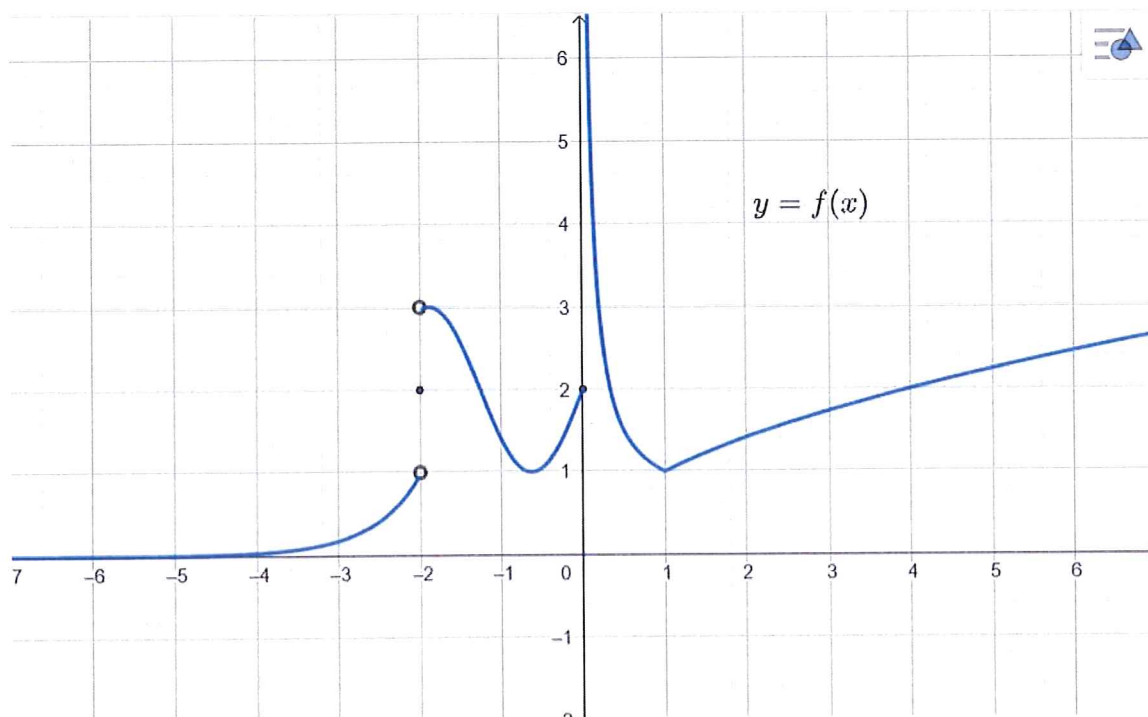
- 3 hantera funktioner som bildas som kombinationer av elementära funktioner, inklusive gränsvärde och derivata,
- 4 tillämpa derivata i olika sammanhang som att skissa grafer, analysera olikheter och optimerar,
- 5 tolka matematisk text inom området samt kommunicera resonemang och beräkningar på ett tydligt och förståeligt sätt.

Examinationsuppgifter

Skriv dina lösningar på separat papper. Använd nytt blad för varje uppgift.

1. Figur 1 visar kurvan $y = f(x)$. Använd den för att lösa följande uppgifter.

- (a) Är funktionen kontinuerlig i punkten där $x = 0$?
- (b) Är funktionen deriverbar i punkten där $x = 1$?
- (c) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, eller motivera varför den inte existerar.
- (d) Bestäm kurvans lokala extrempunkter.



Figur 1: Uppgift 1

2.

(2p/uppgift)

(a) Bestäm följande gränsvärden.

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{3x^2 - 5x + 1}.$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}{2x - 2}.$

(b) Bestäm x -värdet eller värden i vilken funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 4}{x + 1} & \text{om } x < -1 \\ x^2 & \text{om } -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{7x + 2} & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

inte är kontinuerlig.

3. Bestäm derivatan för följande funktioner med valfria deriveringsregler. (2p/uppgift)

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2}}{x}$

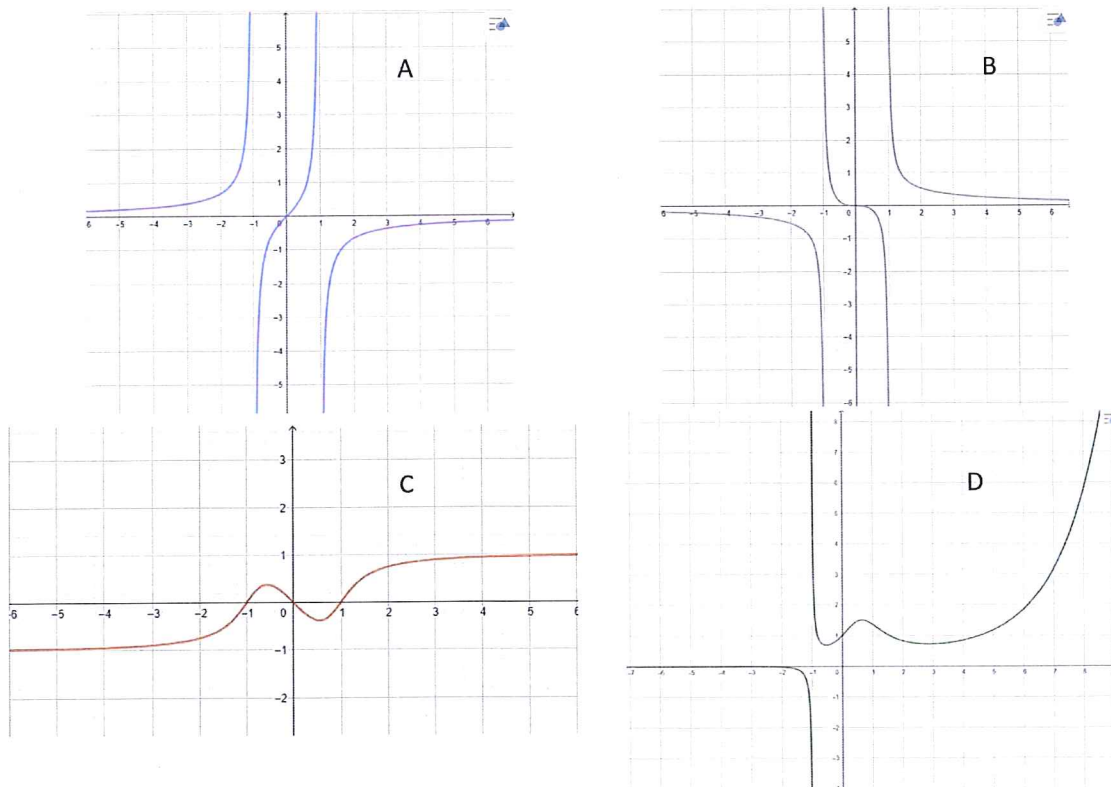
(b) $g(x) = 2^{3x+1} \cdot \tan(3x)$

(c) $h(t) = \frac{t^2 - t}{\sin(2t+1)}$

4. (3p/uppgift)

(a) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^3 - 5x^2 + 6x}$. Hitta de eventuella vertikala och horisontella asymptoter till grafen för $y = f(x)$.

(b) Figur 4b visar kurvorna till följande funktioner. Matcha, med motivering, vilken kurva tillhör vilken funktion.



Figur 2: Uppgift 4b

- $f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^6 + 1}}$
- $g(x) = \frac{x}{1 - x^2}$
- $h(x) = \frac{e^x}{x^3 + 1}$
- $l(x) = \frac{-x^3}{1 - x^4}$

5.

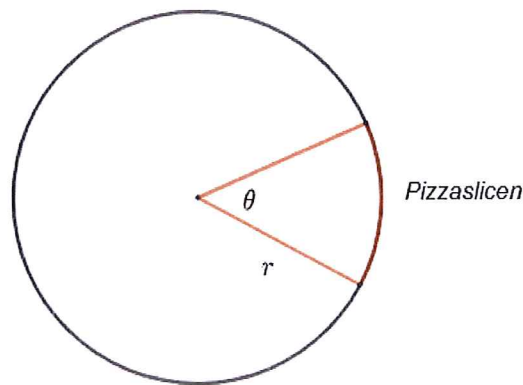
(3p/uppgift)

- (a) För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, där a och b är konstanter. Funktionen har en lokal minimipunkt i koordinaten $(2, -2)$. Bestäm konstanterna a och b .
- (b) För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.
- Bestäm med hjälp av derivata intervallen i vilken funktionen växer respektive avtar.
 - Bestäm punkten/punkterna (dvs. x -värden) i vilken funktionens graf har lokala maximi- och minimivärden. Bestäm också inflexionspunkter för funktionens graf.

6.

(3p/uppgift)

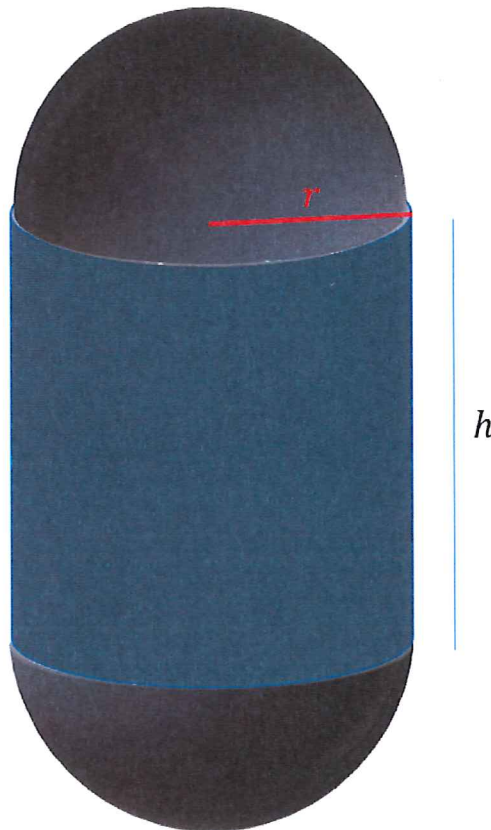
- (a) Du erbjuds att skära en pizzaslice från en rund pizza (se Figur 6a). Pizzaslicen ska ha en omkrets på 60 cm. Vilken diameter på pizzan ger dig den största möjliga pizzaslicen?



Figur 3: Uppgift 6a

- (b) En firma tillverkar en vattentank som består av en cylindrisk del med ett halvklot i vardera änden (se Figur 6b). Halvkloten kostar dubbelt så mycket per ytenhet att tillverka som den cylindriska väggen, och tankens total volym måste vara 900π kubikmeter. Hitta radien och höjden på den cylindriska delen som gör att tanken kan tillverkas till lägsta möjliga kostnad.

(OBS: Areal för klot med radien r är $A_{klot} = 4\pi r^2$, och volymen är $V_{klot} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Areal av cylindern (exklusiv basen) med radien r och höjden h är $A_{cy} = 2\pi r h$, och volymen är $V_{cy} = \pi r^2 h$.)



Figur 4: Uppgift 6b

Derivatans för elementärfunktioner samt deriveringsregler	
$f(x)$	$f'(x)$
x^n , där $n \in \mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
e^{kx} , k är konstant.	$k \cdot e^{kx}$
a^x	$\ln a \cdot a^x$
a^{kx} , k är konstant.	$k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\ln kx $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\log_a kx$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cdot \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \cdot \sin kx$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två funktioner.	
$F(x)$	$F'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$
$kf(x)$	$kf'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$f \circ g(x) = f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(kx + m)$	$k \cdot f'(kx + m)$