

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2025-01-15

Skrivtid: 14.15 – 19.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Berörda lärare:

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys* samt *Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

- | | | |
|-------------|-------------------------------------|---|
| Anvisningar | ☐ | Ta nytt blad för varje lärare |
| | ☒ | Ta nytt blad för varje ny fråga |
| | ☒ | Skriv endast på en sida av papperet. |
| | ☒ | Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad. |
| | ☒ | Numrera lösbladen löpande. |
| | ☒ | Använd inte röd penna. |
| | ☒ | Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta. |

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

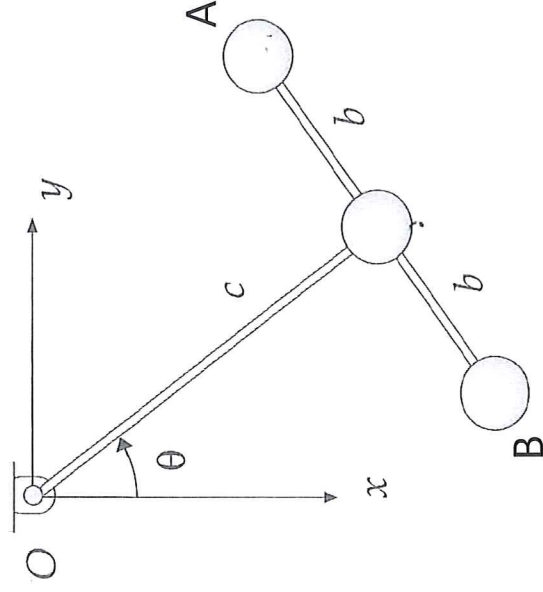
Antal sidor totalt

1) Basuppgift – kursmål 1

Tre små kulor, vardera med massan m , är förenade med mycket lätta stänger enligt figuren. Kroppen är upphängd i en fix horisontell axel i O , det vill säga systemet rör sig i ett vertikallplan. Antag att vinkelhastigheten i det visade läget är $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Antag vidare att vinkeln θ ökar med tiden och att $c = 2b$.

För det visade läget:

- Rita en figur där hastighetsvektorn för tyngdpunkten (TP) relativt den fixa punkten O samt hastighetsvektorer för kula A och B relativt TP visas tydligt. Ange även storleken på dessa tre vektorer.
- Storleken på systemets totala rörelsemängd med avseende på den fixa punkten O .
- Bestäm systemets totala kinetiska energi.
- Bestäm rörelsemängdsmomentet relativt TP till storlek och riktning.
- Ställ upp ekvationerna som bestämmer lagerkrafterna i O . Använd naturliga koordinater. Räcker informationen i uppgiften för att uttrycka lagerkrafterna i kända storheter?

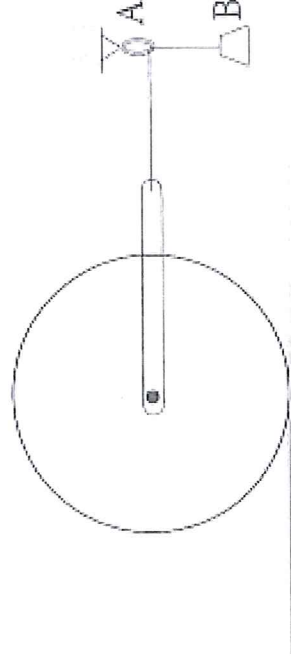


2) Basuppgift – kursmål 2

Ett cirkulärt hjul (tunnband) med radien R kan rulla utan att glida på ett horisontellt underlag. Hjulets totala massa M är koncentrerad (homogent fördelad) till periferin (se figuren). En lina är fäst i hjulets mittpunkt med hjälp av en mycket lätt bygelanordning (se figuren). Linan löper horisontellt och passerar genom en friktionsfri öga A . I linans fria ände hänger en kropp (punktpartikel) B med massan m .

Systemet släpps från vila.

- Frilägg hjulet när det rullar och partikel B börjat falla nedåt. Rita ut alla krafter på hjulet och partikel B . Förklara Dina införda beteckningar.
- Inför lämpligt koordinatsystem och applicera Newtons andra lag på hjulet och partikel B . Använd att det finns ett samband mellan accelerationen för TP och partikel B .
- Ange sambandet mellan hastigheten v för TP och hjulets vinkelhastighet ω vid rullning.
- Bestäm hjulets kinetiska energi när det rullar utan glidning. Ditt svar får innehålla m och hastigheten v för TP .
- Använd energilagen för att bestämma farten för partikel B när den fallit sträckan L . Ditt svar får innehålla m , M och L .



Basuppgift – kursmål 3

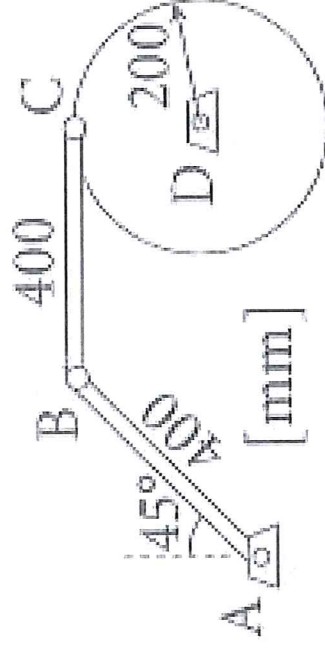
Studera figuren nedan. Armen AB roterar med vinkelhastigheten 5.0 rad/s (moturs). A och D är fixa punkter och punkt C är fastsatt i hjulet med radien 200 mm .

Bestäm för det visade läget i figuren:

- a) Hastighetsvektorena för punkt B och C . Hastighetsvektorn för C får innehålla den än så länge okända vinkelhastigheten för hjulet.

Med hjälp av sambandsformeln för hastighet bestäm:

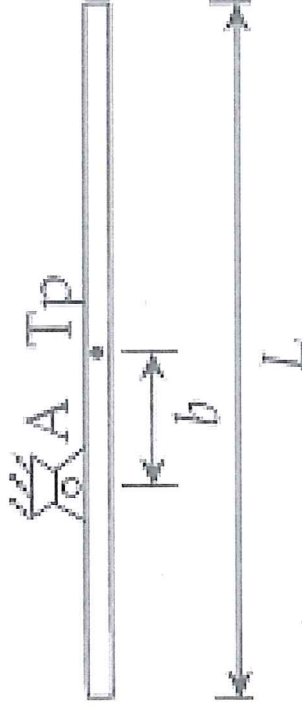
- i) vinkelhastigheten för stängen BC till storlek och riktning.
ii) vinkelhastigheten för hjulet till storlek och riktning.



Basuppgift – kursmål 4

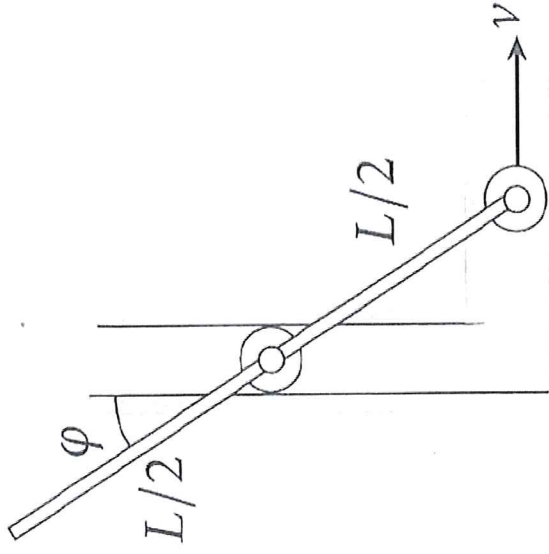
En homogen stång (se figur) med längd L och massa m kan rotera friktionsfritt kring den horisontella axeln A . Stången roterar alltså i ett vertikalt plan. Tyngdpunkten (T_p) är markerad i figuren. Stången släpps från vila i ett horisontellt läge.

- Vilka krafter påverkar stången ? Svara med ord.
- Bestäm stångens tröghetsmoment med avseende på en horisontell axel genom A .
När stången roterat ett kvarts varv (stången vertikal):
- Bestäm stångens vinkelhastighet med hjälp av energilagen.
- Bestäm skivans vinkelacceleration genom att först beräkna krafternas moment relativt A .
- Ställ upp ekvationerna som ger Dig lagerkrafterna i A . Använd lämpligtvis naturliga koordinater.



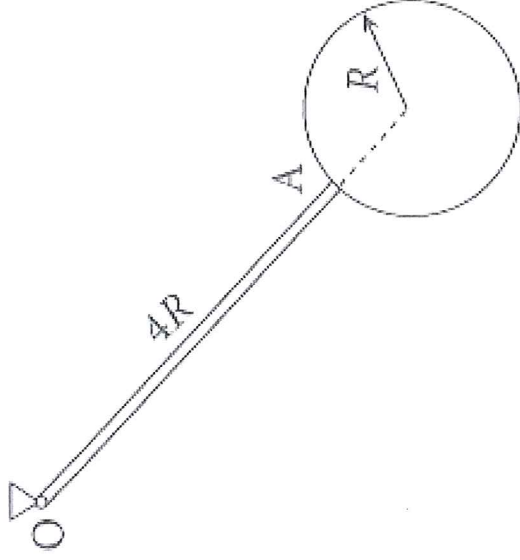
Stången i figuren har massan m och längden L . Den släpps från vila i lodrätt läge. Dom två små hjulen har försumbar massa.

Bestäm tyngdpunktens hastighetsvektor samt farten v (se figuren).
Beräkna numeriskt för $\varphi = 45$ grader.



Bestäm svängningstiden (små svängningar) för en fysisk pendel; se figur nedan.
Pendeln består av en stång OA (massa m och längd $4R$) och en cirkulär skiva (massa $4m$ och radie R)
Systemet kan rotera friktionsfritt kring en fix horisontell axel vilken betecknas O i figuren.

Ledning: Använd Steiner's sats samt att för små vinklar θ gäller $\sin(\theta) \cong \theta$.



Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_t = R\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = R\omega \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathbf{a} = \ddot{s} \hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = R\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + R\omega^2 \hat{\mathbf{e}}_n = R\alpha \hat{\mathbf{e}}_t + R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_r + R\alpha \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O : $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Impulslagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Impulsmomentlagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{p}}$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten TP : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p O : $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m \mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt O : $\dot{\mathbf{M}}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p TP : $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p TP : $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP} \omega \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p TP : $\dot{\mathbf{M}}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} I_{TP} \omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom O : $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom O : $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = r\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

Formelsamling för matematisk analys

Trigonometriska identiteter

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\
 \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) & \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\
 \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \\
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\
 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} & \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\
 \text{Eulers formel: } e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta & \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})
 \end{aligned}$$

Standardgränsvärden

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x} \right)^x &= e^t & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} &= 0 \text{ om } a > 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-qx} &= 0 \text{ om } q > 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} &= 0 \text{ om } q > 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln x)^q &= 0 \text{ om } p > 0 & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} &= 0 \text{ för heltal } m \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \text{ om } a > 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1
 \end{aligned}$$

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ om $a \neq -1$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x $	$1/x$	$x \ln x - x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln \cos x + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$		$\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$		$\arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$		$\ln x + \sqrt{a^2 + x^2} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x + C$

Derivering och integrering

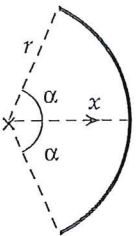
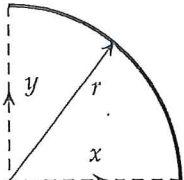
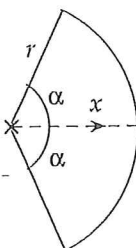
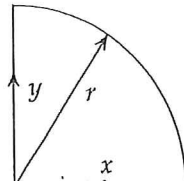
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx, \quad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

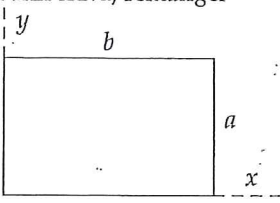
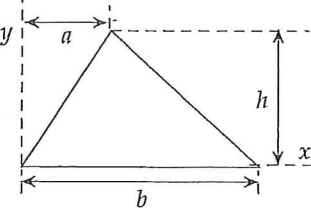
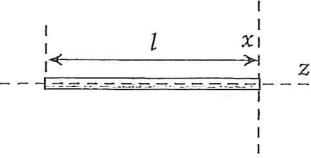
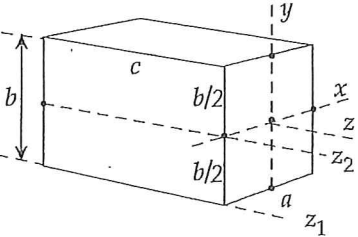
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

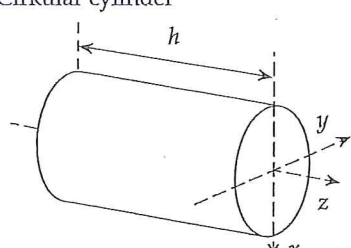
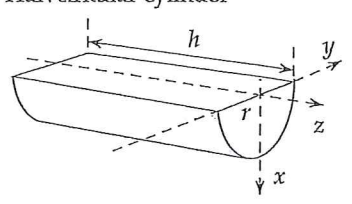
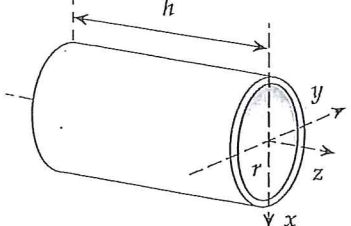
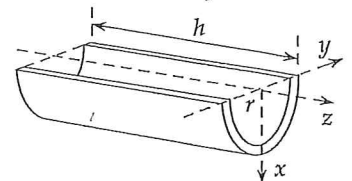
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

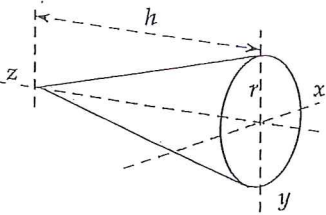
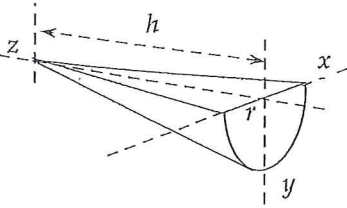
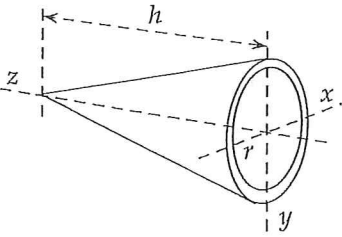
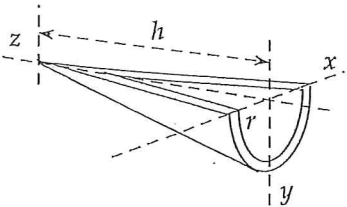
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn skiva, rektangel 		$I_x = \frac{1}{3}ma^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ma^2$
Tunn skiva, triangel 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18}mh^2$
Smal rak stång 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3}ml^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ml^2$
Rätblock 		$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{12}mb^2$

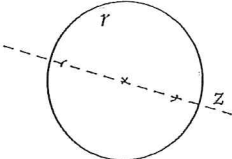
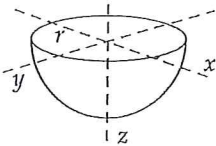
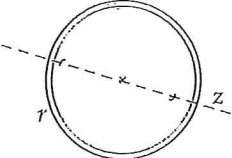
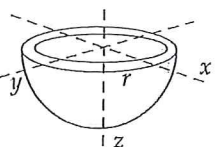
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$ $\bar{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320}mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12}mr^2$