HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2024-03-01

Skrivtid: 14.15 – 18.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Berörda lärare:

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys* samt *Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

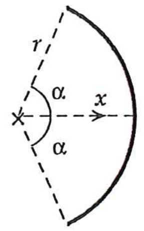
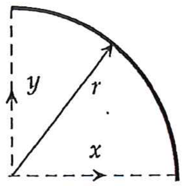
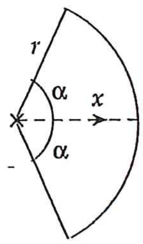
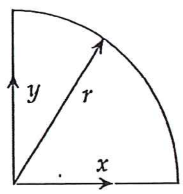
Lycka till!

Antal sidor totalt

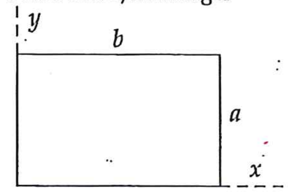
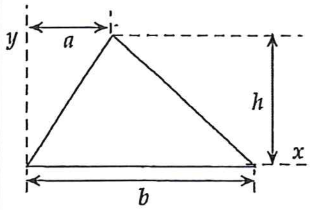
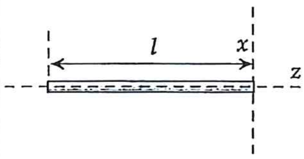
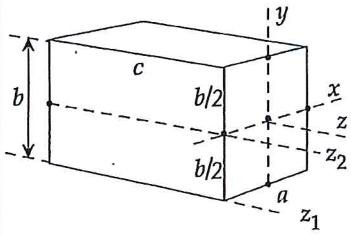
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

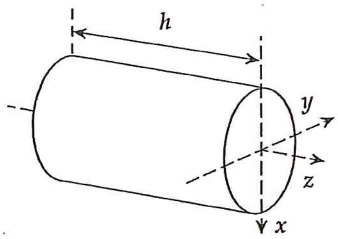
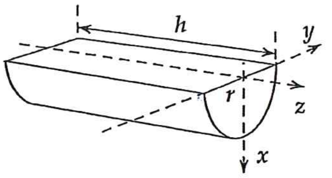
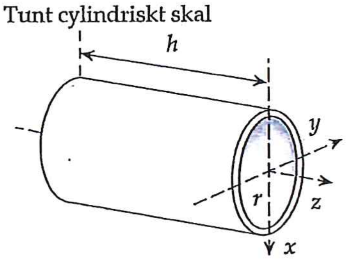
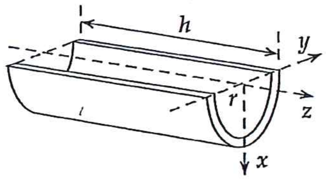
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge  	$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge  	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor  	$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel  	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

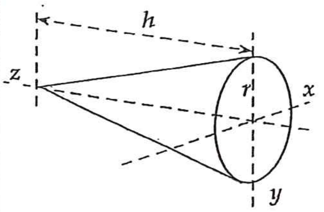
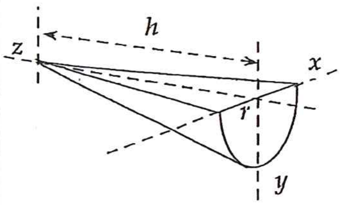
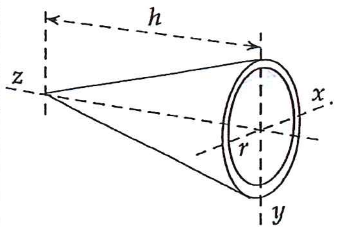
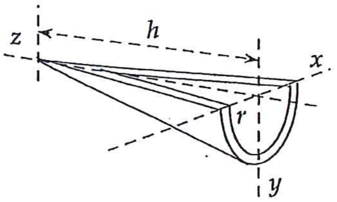
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn skiva, rektangel 		$I_x = \frac{1}{3}ma^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ma^2$
Tunn skiva, triangel 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18}mh^2$
Smal rak stång 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3}ml^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ml^2$
Rätblock 		$I_z = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{12}mb^2$

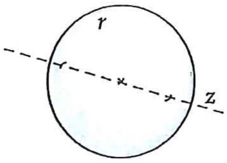
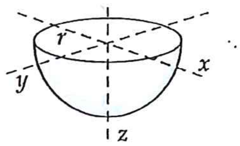
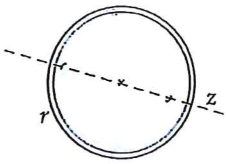
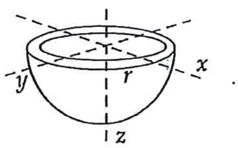
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$ $\bar{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5} mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320} mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3} mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12} mr^2$

Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{s}\,\hat{\mathbf{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_t = R\omega\,\hat{\mathbf{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = R\omega\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathbf{a} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{e}}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = R\dot{\omega}\,\hat{\mathbf{e}}_t + R\omega^2\,\hat{\mathbf{e}}_n = R\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_t + R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\dfrac{v^2}{R}\,\hat{\mathbf{e}}_r + R\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Impulslagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Impulsmomentlagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $\displaystyle W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $\displaystyle W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{p}}$

Kinetisk energi: $T = \dfrac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten *TP*: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p *O*: $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt *O*: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m\mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt *O*: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p *TP*: $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p *TP*: $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP}\omega\, \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p *TP*: $\mathbf{M}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}I_{TP}\omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom O: $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom O: $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = r\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

1 Basuppgift – kursmål 1

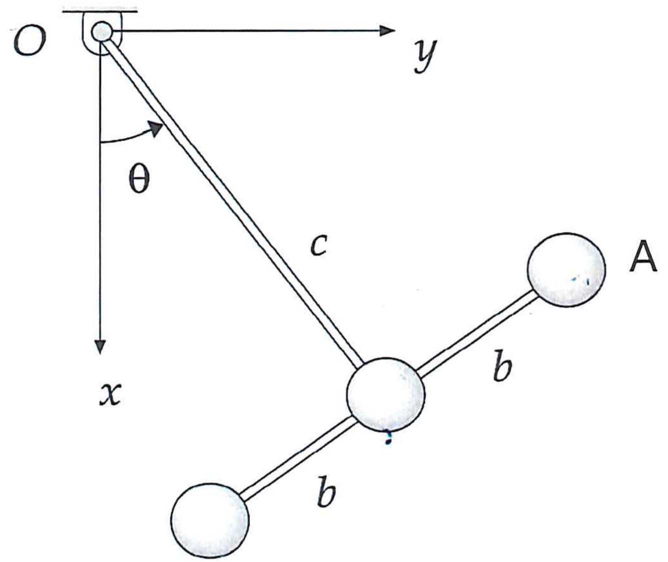
Tre små kulor, vardera med massan m, är förenade med mycket lätta stänger enligt figuren. Kroppen är upphängd i en fix horisontell axel i O, det vill säga systemet rör sig i ett vertikalplan. Antag att vinkelhastigheten i det visade läget är $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Antag vidare att vinkeln θ ökar med tiden och att $c = 2b$.

a) Bestäm tyngdpunktens (TP) lägesvektor samt rita in i figuren hastighetsvektorn för kula B (ange längd) relativt den fixa punkten O.

b) Systemets totala kinetiska energi.

c) Systemets rörelsemängdsmoment till storlek och riktning med avseende på den fixa punkten O.

d) Ställ upp ekvationerna som bestämmer lagerkrafterna i O. Använd naturliga koordinater. Räcker informationen i uppgiften för att uttrycka lagerkrafterna i kända storheter ?



2

Basuppgift – kursmål 2

Ett tunnband (all massa i periferin) har radien *r* och massan *m.* Tunnbandet rullar (θ ökar med tiden) utan att glida på insidan av en cylindrisk trumma med radien 3*r* (se figuren).

a) Ställ upp Newtons andra lag för tyngdpunkten (*TP*) i det övre läget (A). Använd naturliga koordinater.

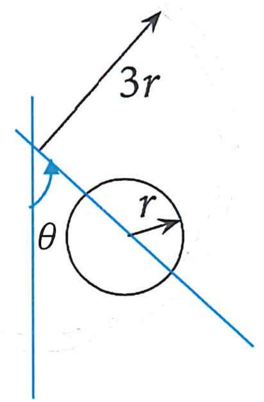
Beteckna farten för *TP* i det övre läget med v_1.

b) Hur ser rullvillkoret ut för tunnbandet ? Du kan beteckna vinkelhastigheten för tunnbandet med ω i ett godtyckligt läge.

c) Hur stor är den totala rörelseenergin för tunnbandet i det nedre läget om farten för *TP* är v_0 i det nedre läget. Svaret får endast innehålla *m* och v_0.

e) Med hjälp av energilagen, bestäm den minsta farten v_0 så att tunnbandet fullbordar ett helt varv inuti trumman.

A



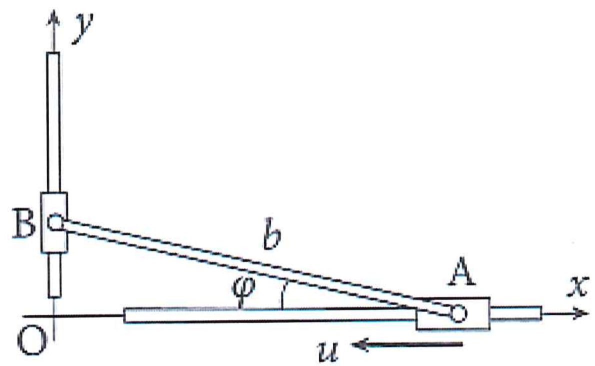
3 Basuppgift – kursmål 3

3

Stången AB:s ändar är bundna att röra sig längs två vinkelräta linjer (se figuren).
Då vinkeln φ är 30 grader har punkten A farten u åt vänster enligt figuren.

Bestäm för det visade läget i figuren:

a) koordinaterna för momentancentrum,
b) vevstaken AB:s vinkelhastighet till storlek och riktning,
c) hastighetsvektorn för punkt B med hjälp av formeln för relativ hastighet (additionsformeln).



4 Basuppgift – kursmål 4

En så kallad fysisk pendel består av två homogena smala stänger *OA* och *BC*. Stängerna har båda massan *M* och längden *b*. Pendeln bildar en T-formad struktur (se figuren), då punkten A befinner sig mitt på stången BC. Pendeln är friktionsfritt lagrad genom en horisontell, fix axel i *O*. Pendeln släpps från vila i ett läge där OA är horisontell.

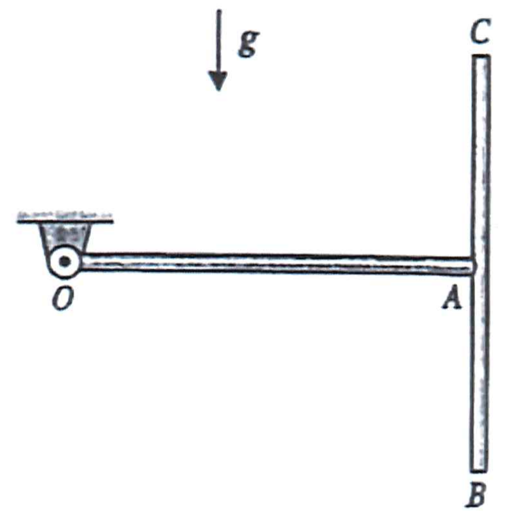
Bestäm

i) läget för systemets tyngdpunkt (TP),

ii) tröghetsmomentet för pendeln med avseende på rotationsaxeln genom O,
Ledning: använd Steiner's sats.

iii) vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen läget då OA är vertikal,

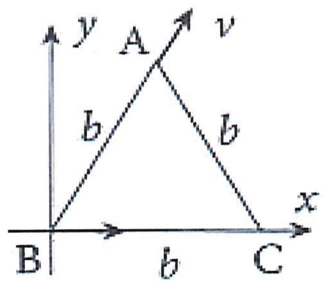
iv) reaktionskraften i upphängningspunkten O i det läget då OA är vertikal.



5

Studera den liksidiga triangeln med sidan *b* nedan. I det ögonblick som visas i figuren så har triangeln hastigheter riktade längs två triangelsidor. A:s hastighet är *v* (känd) medan B:s hastighet är endast känd till riktningen.

Ange koordinaterna för skivans momentancentrum samt beräkna hastighetsvektorn för hörnet C.



6

Tre likadana bollar, vardera med massan m, är stelt ihopsatta med *mycket* lätta stänger. Systemet ligger i vila på ett friktionsfritt horisontellt bord enligt figuren nedan. En kraft F appliceras på den översta bollen enligt figuren.

Beräkna i just detta läge (då bollarna ännu inte hunnit flytta sig jämfört med positionerna i figuren).

i) accelerationen för systemets masscentrum (TP),
ii) vinkelaccelerationen runt TP,
iii) accelerationen hos den översta bollen just efter kraften börjat verka på systemet.