HÖGSKOLAN
I SKÖVDE

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2025-02-28

Skrivtid: 14.15 – 19.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Berörda lärare: Ola Nyqvist 0500-448609

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys* samt *Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

1 Basuppgift – kursmål 1

Fyra små kulor, vardera med massan *m*, är förenade med mycket lätta identiska stänger enligt figuren. Kroppen roterar runt en fix vertikal axel genom *O*, det vill säga systemet rör sig i ett horisontalplan. Antag att vinkelhastigheten i det visade läget är $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Antag vidare att vinkeln θ ökar med tiden. Försumma all friktion.

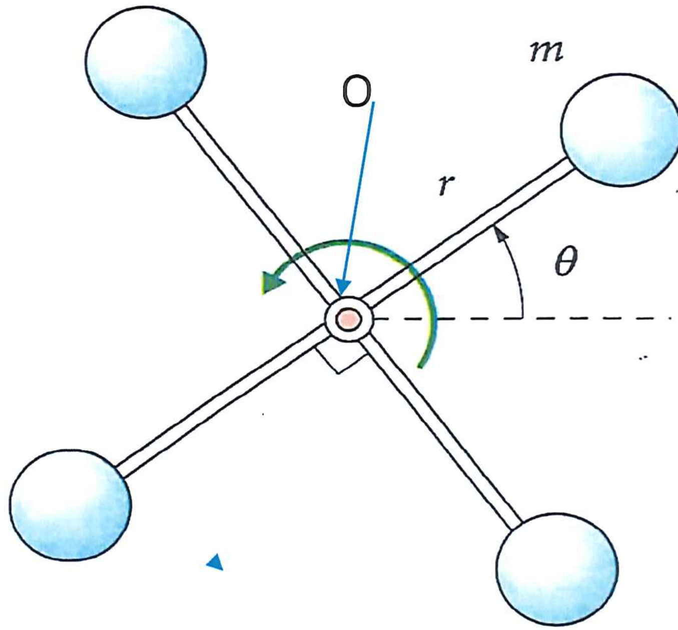
För det visade läget:

a) Bestäm lägesvektorn och hastighetsvektorn för kula A relativt den fixa punkten *O*. Inför lämpligt koordinatsystem.

b) Rörelsemängden för kula A samt systemets totala rörelsemängd med avseende på den fixa punkten *O*.

c) Bestäm systemets totala kinetiska energi.

d) Bestäm totala rörelsemängdsmomentet <u>relativt</u> systemets tyngdpunkt (*TP*) till storlek och riktning.



2 Basuppgift – kursmål 2

Ett cirkulärt hjul med radien R rullar inuti en cirkulär trumma (horisontell axel) med radien $3R$ enligt figuren. Hjulets totala massa $M = 5m$ är koncentrerad till periferin och centrum (se figuren). Den givna massfördelningen ger att hjulets tyngdpunkt (*TP*) ligger i hjulets centrum.

Systemet släpps från vila då $\varphi = 60$ grader. Notera att φ beskriver läget av *TP*.

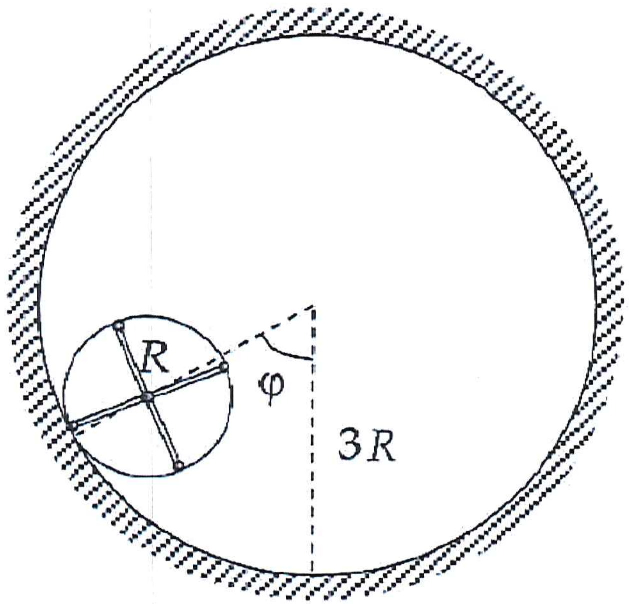
a) Frilägg hjulet i det visade läget (godtyckligt φ) och rita ut alla krafter.

b) Ställ upp Newton II för *TP* i det visade läget. Använd naturliga koordinater och förklara dina beteckningar.

c) Ange sambandet mellan hastigheten v för *TP* och hjulets vinkelhastighet ω vid rullning.

d) Om v betecknar farten för *TP* i det nedre läget, bestäm hjulets kinetiska energi i det nedre läget.

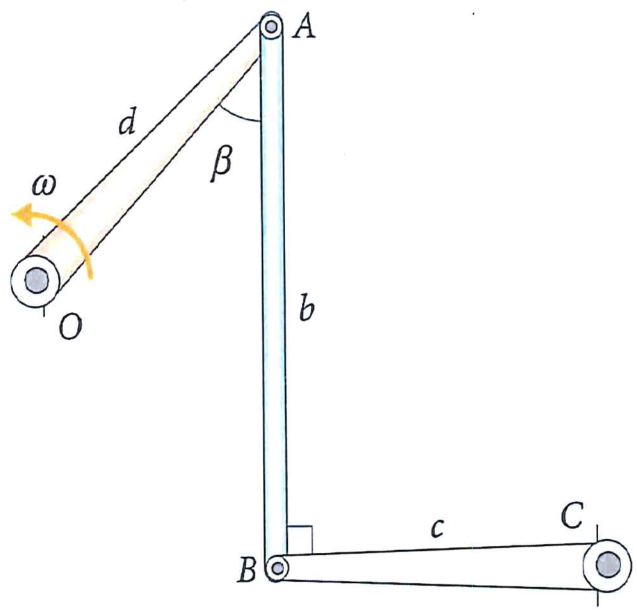
e) Ange sambandet mellan hjulets vinkelhastighet ω vid rullning och tidsderivatan av φ (vinkelhastigheten för *TP*).



3 Basuppgift – kursmål 3

Betrakta systemet nedan där de tre länkarmarna med längderna *b, c* och *d* är förenade i punkterna *A* och *B*. Vinkelhastigheten ω är konstant och punkterna O och C är fixa.
Bestäm för det visade läget i figuren då stången AB är vertikal och stången BC horisontell:

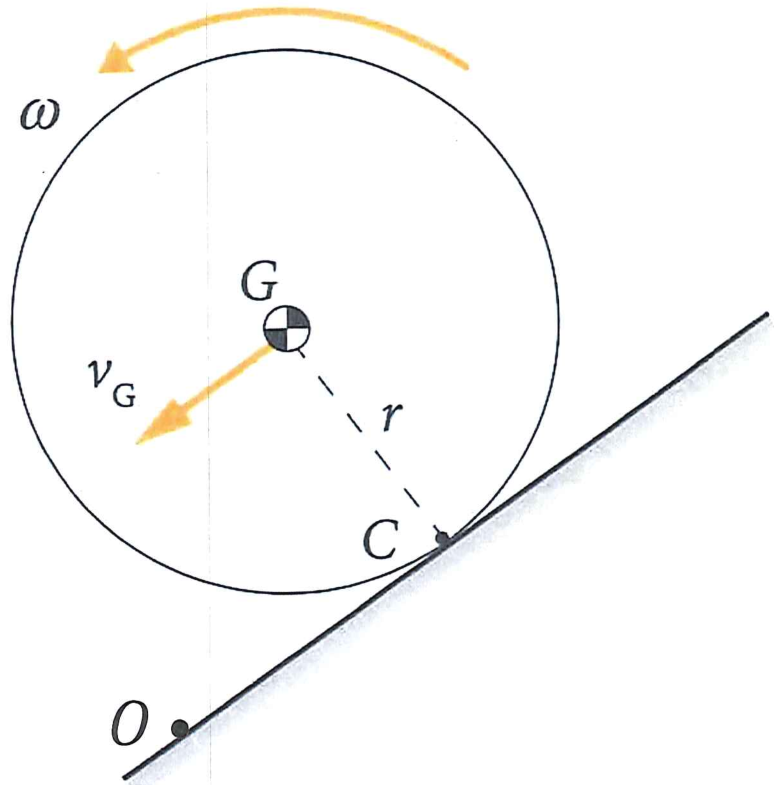
a) Momentancentrums (MC) läge för stång AB. Rita en figur där läget illustreras.
b) Vinkelhastigheten till storlek för stängerna AB och BC med hjälp av MC.
c) Vinkelhastigheten till storlek och riktning för stången AB med hjälp av formeln för relativ hastighet (sambandsformeln).



4 Basuppgift – kursmål 4

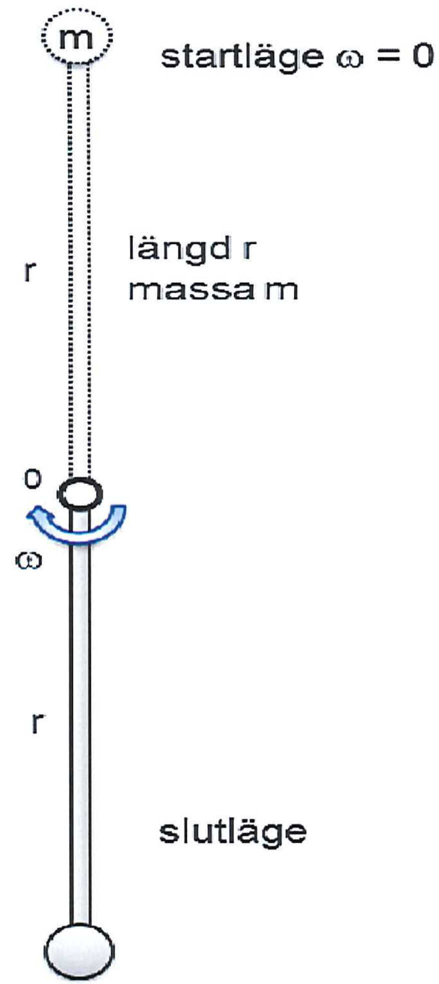
En homogen cylinder med massan m och radien r rullar utan att glida nedför ett lutande plan. Du kan kalla vinkeln mellan planet och horisonten för θ.

i) Frilägg hjulet och rita ut alla krafter.
ii) Ställ upp Newtons andra lag för hjulets tyngdpunkt G. Förklara dina beteckningar.
iii) Ställ upp momentekvationen med avseende på hjulets tyngdpunkt G.
iv) Bestäm hjulets totala kinetiska energi. Ditt svar får <u>inte</u> innehålla tyngdpunktens hastighet v_G. Dock får Ditt svar innehålla vinkelhastigheten ω.
i) Beräkna cylinderns rörelsemängdsmoment med avseende på punkten O i figuren.



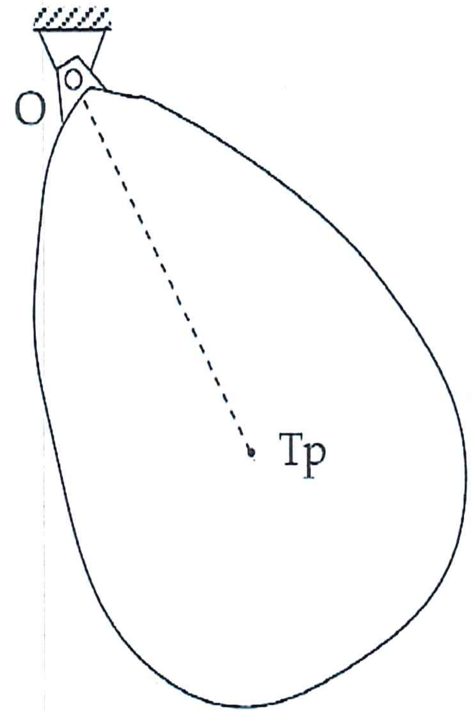
5

En stång längd *r* och massan *m* har en punktpartikel, också den med massan *m,* fastsatt längst ut på stången. Systemet är friktionsfritt lagrat i axeln O och släpps från vila (startläge) enligt figuren. Rörelsen sker i vertikalplanet.
Beräkna lagerkraften i 0 uttryckt i *mg* då systemet har roterat ett halvt varv (slutläge).



6

Bestäm svängningstiden (små svängningar) för en fysisk pendel; se figur nedan. Inför Själv lämpliga beteckningar. Tp betecknar systemets tyngdpunkt. Systemet kan rotera friktionsfritt kring en horisontell axel vilken betecknas O i figuren.



Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathrm{v} = \dot{s}\,\hat{\mathrm{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathrm{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathrm{e}}_t = R\omega\,\hat{\mathrm{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathrm{v} = \dot{r}\,\hat{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathrm{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathrm{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\mathrm{e}}_\theta = R\omega\,\hat{\mathrm{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathrm{a} = \ddot{s}\,\hat{\mathrm{e}}_t + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{\mathrm{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathrm{a} = R\dot{\omega}\,\hat{\mathrm{e}}_t + R\omega^2\,\hat{\mathrm{e}}_n = R\alpha\,\hat{\mathrm{e}}_t + R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathrm{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathrm{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathrm{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\mathrm{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathrm{a} = -R\dot{\theta}^2\,\hat{\mathrm{e}}_r + R\ddot{\theta}\,\hat{\mathrm{e}}_\theta = -\dfrac{v^2}{R}\,\hat{\mathrm{e}}_r + R\alpha\,\hat{\mathrm{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O: $\mathrm{M}_O = \mathrm{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathrm{p} = m\mathrm{v}$

Impulslagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathrm{v}(t_2) - m\mathrm{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O: $\mathrm{L}_O = \mathrm{r} \times \mathrm{p}$

Impulsmomentlagen: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{M}_O\,dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathrm{v}$

En krafts arbete: $W = \displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathrm{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $W = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathrm{a} = m\dot{\mathrm{p}}$

Kinetisk energi: $T = \dfrac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten ***TP***: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p ***O***: $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt ***O***: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m\mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt ***O***: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p ***TP***: $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p ***TP***: $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP}\omega\, \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p ***TP***: $\mathbf{M}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2}mv_{TP}^2 + \frac{1}{2}I_{TP}\omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom $\boldsymbol{O}$: $T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom $\boldsymbol{O}$: $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = r\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega\ \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega}\ \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2\ \hat{\mathbf{e}}_n$

Formelsamling för matematisk analys

Trigonometriska identiteter

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ $\qquad$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\qquad$ $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),\quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{a^x} = 0 \text{ om } a>1 \qquad \lim_{x\to\infty} x^p e^{-qx} = 0 \text{ om } q>0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^q} = 0 \text{ om } q>0$$

$$\lim_{x\to 0+} x^p(\ln x)^q = 0 \text{ om } p>0 \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{a^m}{m!} = 0 \text{ för heltal } m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \text{ om } a>0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ om $a \neq -1$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$x\ln\lvert x\rvert - x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x\ln a$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln\left\lvert x + \sqrt{a+x^2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x + C$

Derivering och integrering

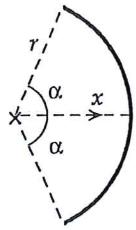
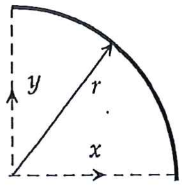
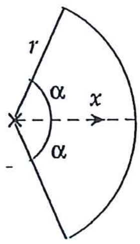
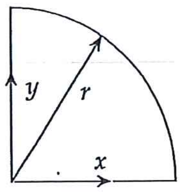
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \qquad \frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx, \qquad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

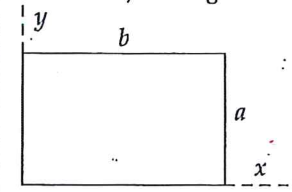
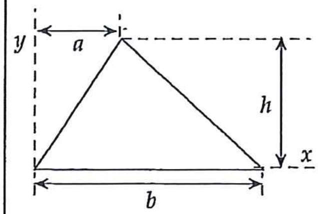
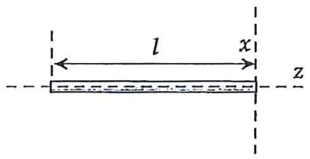
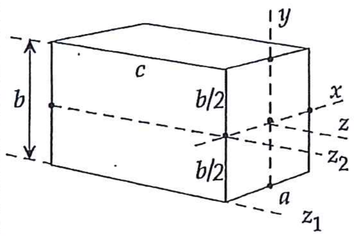
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

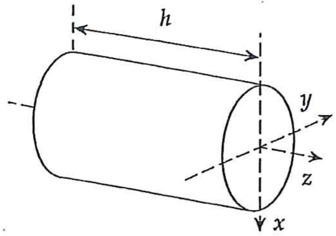
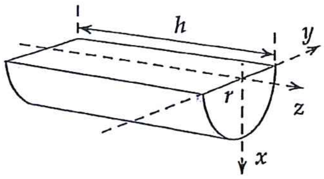
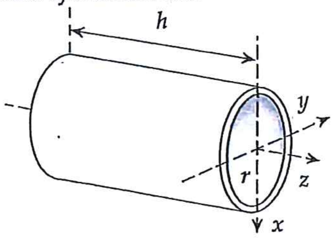
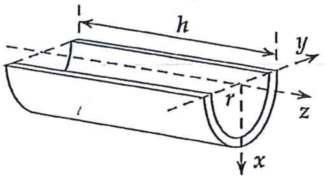
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

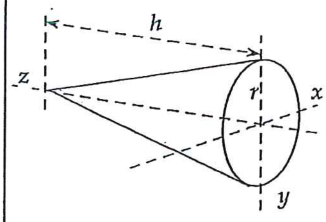
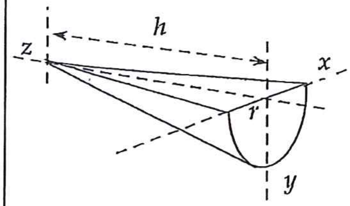
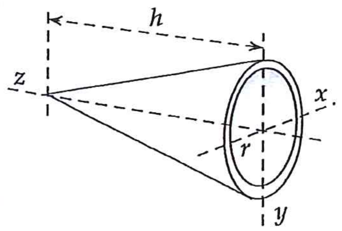
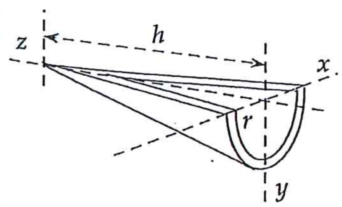
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn skiva, rektangel 		$I_x = \frac{1}{3} m a^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12} m a^2$
Tunn skiva, triangel 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6} m h^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18} m h^2$
Smal rak stång 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3} m l^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12} m l^2$
Rätblock 		$I_z = \frac{1}{12} m(a^2+b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3} m(a^2+b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3} m a^2 + \frac{1}{12} m b^2$

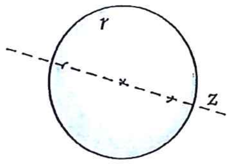
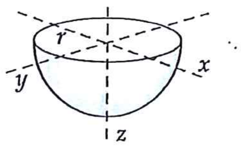
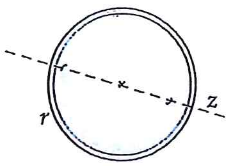
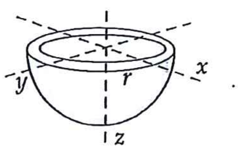
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon 	$\bar{z}=\frac{h}{4}$	$I_z=\frac{3}{10}mr^2$ $I_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x=\bar{I}_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\bar{z}=\frac{h}{4}$ $\bar{y}=\frac{r}{\pi}$	$I_z=\frac{3}{10}mr^2$ $I_x=I_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x=\left(\frac{3}{20}-\frac{1}{\pi^2}\right)mr^2+\frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y=\frac{3}{20}mr^2+\frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\bar{z}=\frac{h}{3}$	$I_z=\frac{1}{2}mr^2$ $I_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x=\bar{I}_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\bar{z}=\frac{h}{3}$ $\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$	$I_z=\frac{1}{2}mr^2$ $I_x=I_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x=\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2+\frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320}mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12}mr^2$