

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2024-01-08

Skrivtid: 14.15 – 18.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Berörda lärare:

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys samt Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

Anvisningar

- ☐ Ta nytt blad för varje lärare
- ☒ Ta nytt blad för varje ny fråga
- ☒ Skriv endast på en sida av papperet.
- ☒ Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
- ☒ Numrera lösbladen löpande.
- ☒ Använd inte röd penna.
- ☒ Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

Lycka till!

Antal sidor totalt

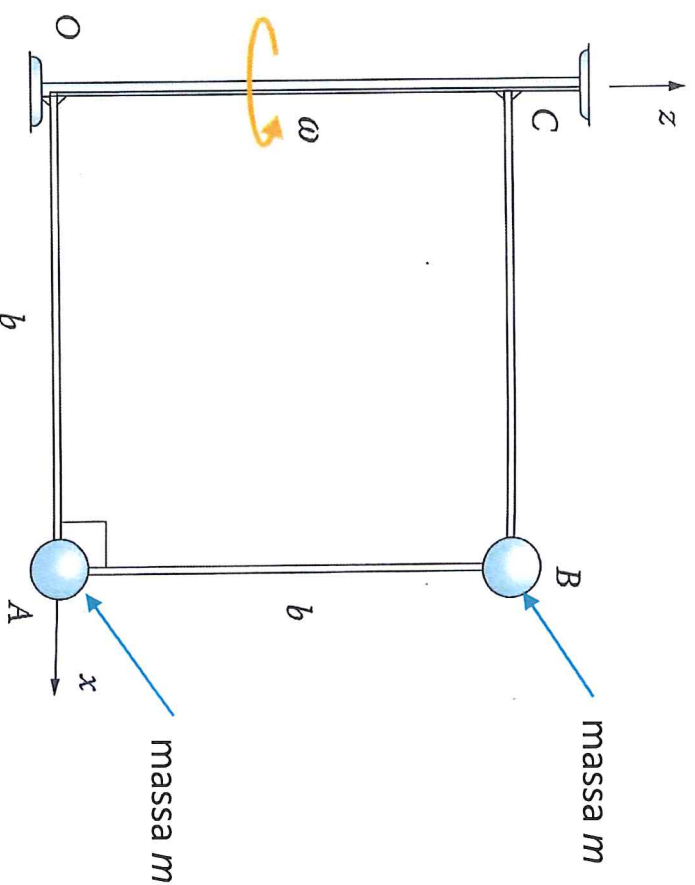
Basuppgift – kursmål 1

1

Två små kulor, vardera med massan m , är fastsatta på ett mycket lätt stelt system av stänger som bildar en kvadrat med sidan b . Systemet roterar som en stel kropp med konstanta vinkelhastigheten ω kring den vertikala axeln OC .

Bestäm i läget som visas i figuren (kulorna i xz -planet):

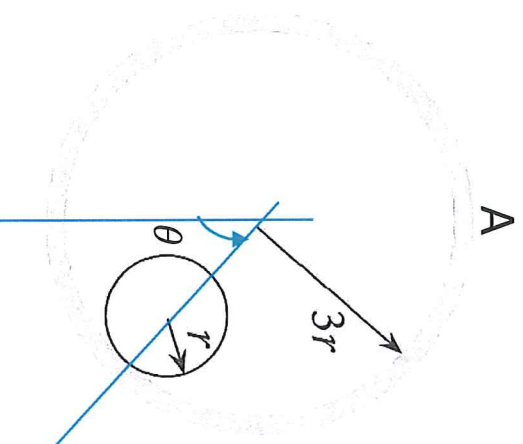
- Hastighetsvektorena (relativt fix O) för både kula A och B och sedan systemets totala kinetiska energi.
- Lägesvektorn samt hastigheten för kula B relativt systemets tyngdpunkt.
- Systemets rörelsemängdsmoment till storlek och riktning med avseende på punkt O .
- Systemets rörelsemängd till storlek och riktning (relativt fix O).



Basuppgift – kursmål 2

Ett tunnband (all massa i periferin) har radien r och massan m . Tunnbandet rullar moturs utan att glida på insidan av en cylindrisk trumma med radien $3r$ (se figuren).

- Ställ upp Newtons andra lag för tyngdpunkten (TP) i det visade läget. Motivera vilka krafter som utför eller inte utför arbete. Välj ett lämpligt koordinatsystem. Förslagsvis inför vinkeln θ vilken anger tyngdpunktens läge relativt lodlinjen.
- Hur ser rullvillkoret ut för tunnbandet ?
- Hur stor är den totala rörelseenergin för tunnbandet i det nedre läget om farten för TP är v_0 i det nedre läget. Svaret får endast innehålla m och v_0 .
- Bestäm tunnbandets lägesenergi (potentiella energi) i nedre läget om nollnivån för lägesenergin sättes vid toppen A på cylindertrumman.



3 Basuppgift – kursmål 3

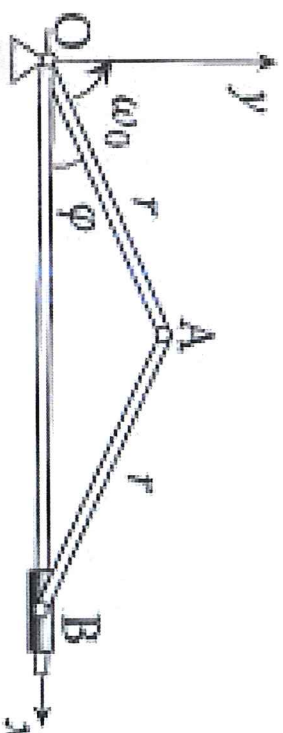
3

Stången OA rotererar med vinkelhastigheten ω_0 kring den fixa punkten O.

Vevstaken AB har samma längd r som OA. Ändpunkten B rör sig längs x-axeln.

Bestäm för det visade läget i figuren:

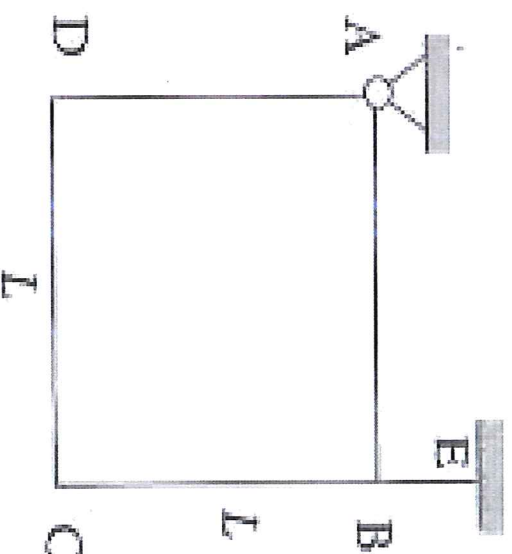
- Hastighetsvektorn för ändpunkt A.
- Vevstaken AB:s vinkelhastighet till storlek och riktning. Ledning: Triangeln OAB är likbent.
- Hastighetsvektorn för ändpunkt B med hjälp av formeln för relativ hastighet (additionsformeln).



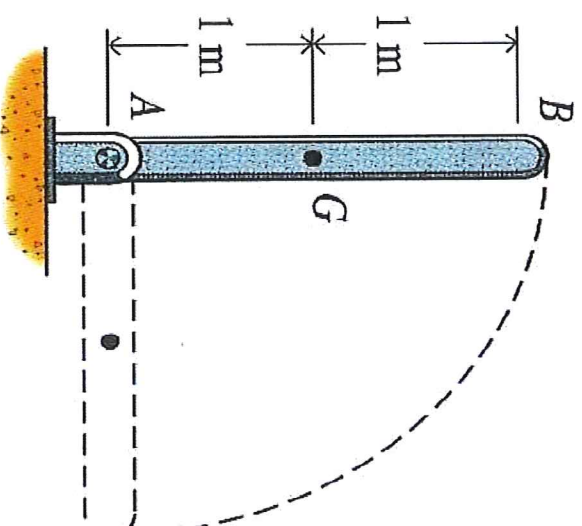
Basuppgift – kursmål 4

En tunn kvadratisk skiva ABCD har massan M . Skivan kan rotera utan friktion kring en fix horisontell axel A, vilken är vinkelrät mot skivan. Skivan hålls initialt i det läge som visas i figuren med hjälp av en lina BE. Nu klippes linan av.

- Ställ upp Newtons andra lag för skivan (dess tyngdpunkt TP) omedelbart efter att linan klippes av. Förklara dina införda beteckningar.
- Ställ upp momentekvationen för skivan med avseende på A omedelbart efter att linan klippes av.
- Bestäm lagerkrafterna i A omedelbart efter att linan klippes av



En likformig stång är 2 meter lång, har massan 10 kg och är initialt i vila i ett vertikalt läge (se figur). Man puttar till stången lite försiktigt så att den faller åt höger. Notera att punkt A är fix och punkt G betecknar tyngdpunkten. Bestäm lagerkrafterna i A när stången är horisontell.



En homogen cylinder med massan m och radien R rullar nedför ett lutande plan med lutningsvinkeln β .

- i) Bestäm tyngdpunktens acceleration längs med planet.
- ii) Bestäm tyngdpunktens hastighet då biljardbollen rullat sträckan L nedför planet. Start från vila.

Formelsamling för matematisk analys

Trigonometriska identiteter

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) & \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) & & \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha & & \\ \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} & \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \text{Eulers formel: } e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta & \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\end{aligned}$$

Standardgränsvärden

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{t}{x} \right)^x &= e^t & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} &= 0 \text{ om } a > 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-qx} &= 0 \text{ om } q > 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^p}{x^q} &= 0 \text{ om } q > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln x)^q &= 0 \text{ om } p > 0 & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} &= 0 \text{ för heltal } m & & \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \text{ om } a > 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1\end{aligned}$$

Elementära derivator och integraler

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ om $a \neq -1$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x $	$1/x$	$x \ln x - x + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$-\ln \cos x + C$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{x \ln x - x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$		$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$		$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$		$\ln x + \sqrt{a+x^2} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x + C$

Derivering och integrering

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx, \quad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_t = R\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = R\omega \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathbf{a} = \ddot{s} \hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = R\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + R\omega^2 \hat{\mathbf{e}}_n = R\alpha \hat{\mathbf{e}}_t + R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_r + R\alpha \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O : $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Impulslagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Impulsmomentlagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{p}}$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten TP : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p O : $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m \mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt O : $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p TP : $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p TP : $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP} \omega \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p TP : $\mathbf{M}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} I_{TP} \omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom O : $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom O : $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = r\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

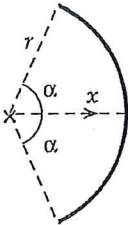
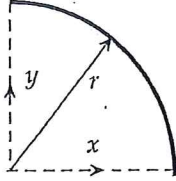
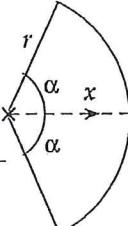
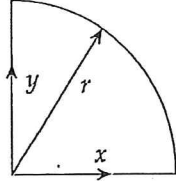
Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

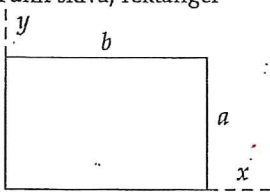
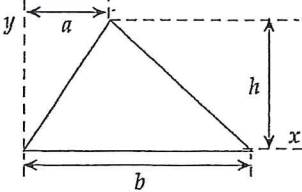
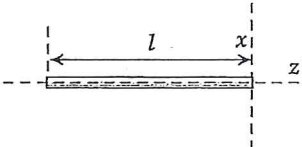
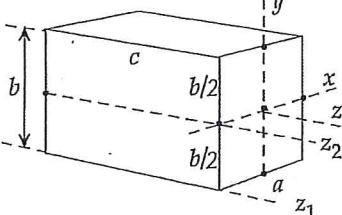
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

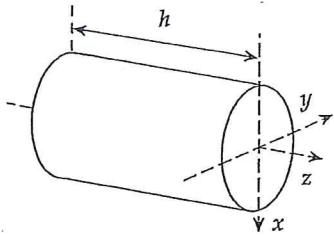
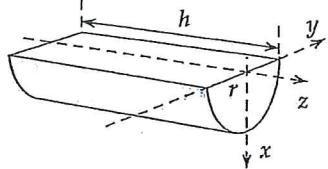
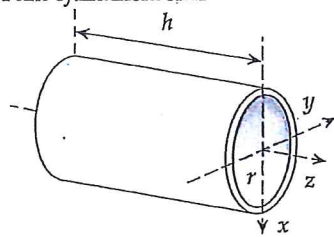
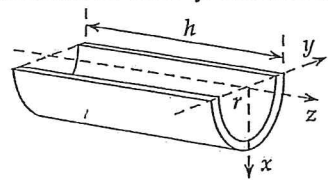
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

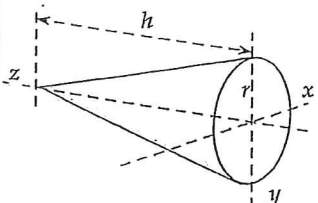
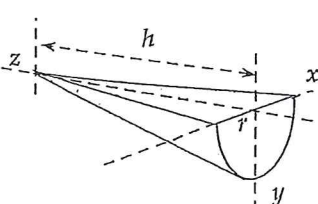
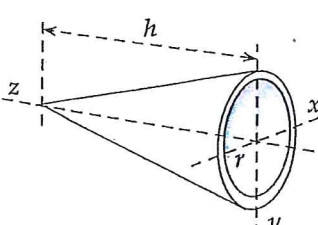
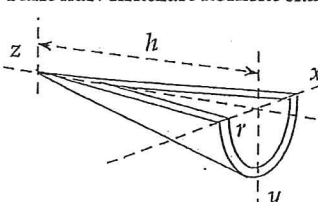
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn skiva, rektangel 		$I_x = \frac{1}{3}ma^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ma^2$
Tunn skiva, triangel 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18}mh^2$
Smal rak stång 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3}ml^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ml^2$
Rätblock 		$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{12}mb^2$

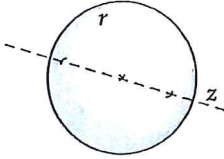
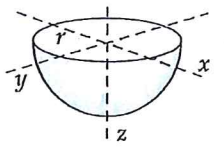
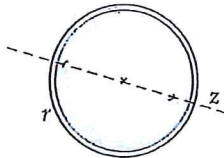
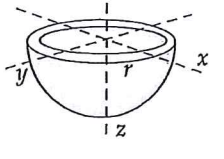
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$ $\bar{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320}mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12}mr^2$