

Institutionen för ingenjörsvetenskap

TENTAMEN

Kurs: Mekanik III

Delkurs

Kurskod: FY303G

Högskolepoäng för tentamen: 5 hp

Datum: 2026-05-08

Skrivtid: 14.15 – 19.30

Ansvarig lärare: Krister Karlsson 0500-448606

Hjälpmedel/bilagor

Bifogat formelblad *Formelblad–Mekanik III FY303G, Formelsamling för matematisk analys* samt *Appendix II Tabeller, formler*. Egen räknedosa. Ring läraren vid frågor. Provformuläret ska lämnas in.

- Anvisningar
- Ta nytt blad för varje lärare
 - Ta nytt blad för varje ny fråga
 - Skriv endast på en sida av papperet.
 - Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad.
 - Numrera lösbladen löpande.
 - Använd inte röd penna.
 - Markera med kryss på omslaget vilka uppgifter som är lösta.

Tentamen omfattar sex problem och bedöms med U, G eller VG. Se dokumentet Betygskriterier.

Skrivningsresultat bör offentliggöras inom 18 arbetsdagar

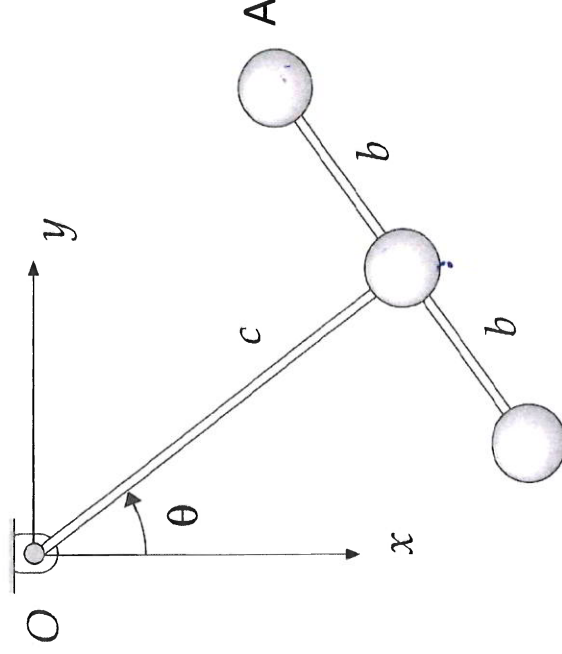
Lycka till!

Antal sidor totalt

Basuppgift – kursmål 1

Tre små kulor, vardera med massan m , är förenade med mycket lätta stänger enligt figuren. Kroppen är upphängd i en fix horisontell axel i O , det vill säga systemet rör sig i ett vertikallplan. Antag att vinkelhastigheten i det visade läget är $\omega = \dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\alpha = \ddot{\theta}$. Antag vidare att vinkeln θ ökar med tiden och att $c = 2b$.

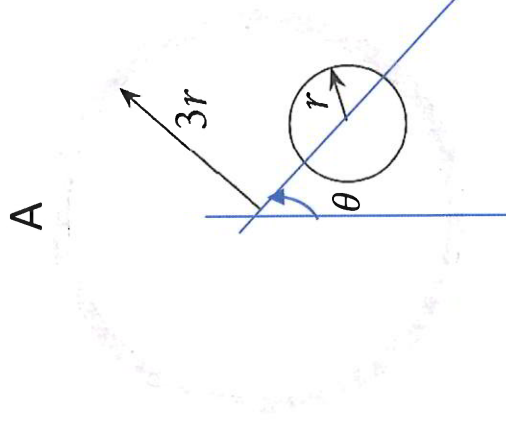
- Bestäm tyngdpunktens (TP) lägesvektor och hastighetsvektor relativt den fixa punkten O .
- Systemets kinetiska energi.
- Systemets rörelsemängdsmoment till storlek och riktning med avseende på den fixa punkten O .
- Ställ upp ekvationerna som bestämmer lagerkrafterna i O . Använd naturliga koordinater. Räcker informationen i uppgiften för att uttrycka lagerkrafterna i kända storheter?



Basuppgift – kursmål 2

Ett tunnband (all massa i periferin) har radien r och massan m . Tunnbandet rullar moturs utan att glida på insidan av en cylindrisk trumma med radien $3r$ (se figuren).

- Ställ upp Newtons andra lag för tyngdpunkten (TP) i det visade läget. Motivera vilka krafter som utför eller inte utför arbete. Välj ett lämpligt koordinatsystem. Förslagsvis införes vinkeln θ vilken anger tyngdpunktens läge relativt lodlinjen.
- Hur stor är den totala rörelseenergin för tunnbandet i det nedre läget om farten för TP är v_0 i det nedre läget. Svaret får endast innehålla m och v_0 .
- Bestäm tunnbandets lägesenergi (potentiella energi) i nedre läget om nollnivån för lägesenergin sättes vid toppen A på cylindertrumman.

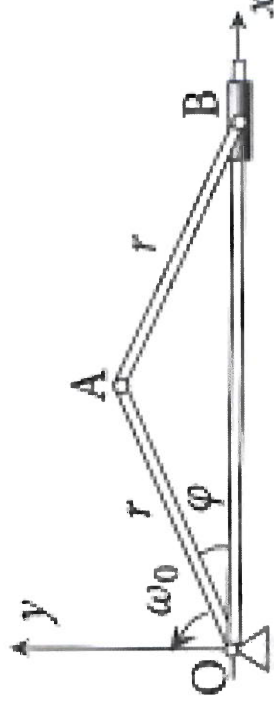


Stången OA roterar med vinkelhastigheten ω_0 kring den fixa punkten O. Vevstaken AB har samma längd r som OA. Ändpunkten B rör sig längs x-axeln.

Bestäm för det visade läget i figuren:

- Hastighetsvektorn för ändpunkt A.
- Vevstaken AB:s vinkelhastighet till storlek och riktning. Lämpligtvis med hjälp av momentancentrum.
Ledning: Triangeln OAB är likbent.
- Hastighetsvektorn för ändpunkt B med hjälp av formeln för relativ hastighet (additionsformeln).

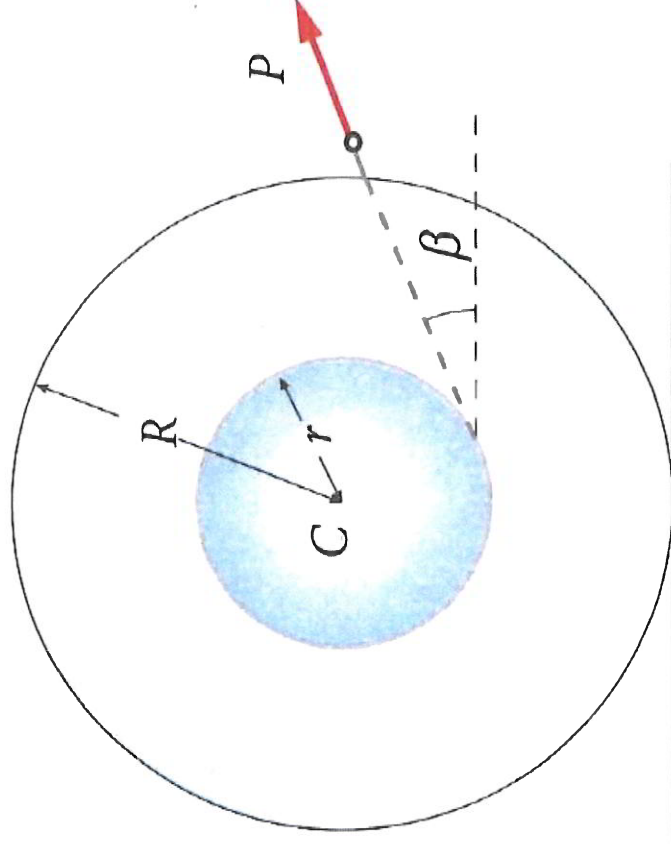
Dina svar får innehålla de beteckningar som finns i figuren



4 Basuppgift – kursmål 4

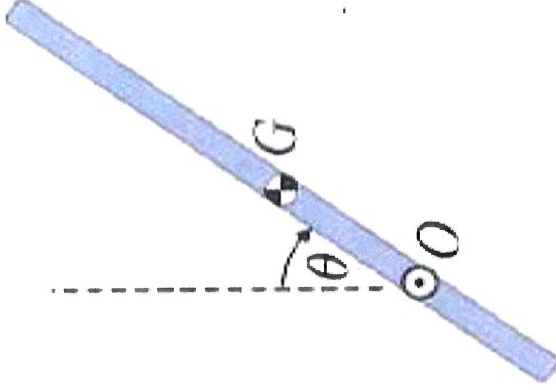
En trådrulle med massan m består av två likadana homogena cylindrar med radien R stelt förenade med en mycket lätt cylinder med radien r på vilken tråden är lindad. Man drar i tråden med en konstant kraft P enligt figuren. Trådrullen ligger på ett strävt bord vilket betyder att systemet rullar utan att glida.

- Frilägg systemet och rita ut alla krafter.
- Ställ upp Newtons andra lag för trådrullens tyngdpunkt.
- Ställ upp momentekvationen med avseende på trådrullens tyngdpunkt TP .
- Ange sambandet mellan trådrullens acceleration (TP) och trådrullens vinkelacceleration.
- Är det nu möjligt att bestämma att trådrullens acceleration? Motivera.



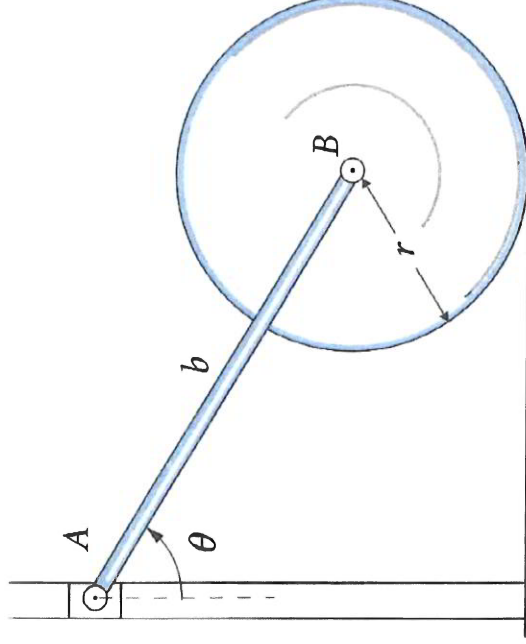
En homogen stång med massan m och längden L kan rotera fritt i ett vertikalkalplan kring en fix axel genom O på avståndet $L/3$ från tyngdpunkten G . Försumma friktionen i O .

Bestäm lagerkraften (storlek och riktning) i O som funktion av vinkeln θ om stången släpps från vila i det högsta läget (stången riktad längs med lodlinjen).



En stång AB med massan m och längden b är i B förenad med en cirkelskivas centrum. Cirkelskivan har också massan m och radien r och kan rulla utan att glida på det horisontella bordet. Ändpunkten A kan glida friktionsfritt i ett vertikalt spår. Bestäm hastigheten för cirkelskivans medelpunkt B som funktion av vinkeln θ om rörelsen startar från vila då $\theta = \beta$.

Ledning: Använd energilagen.



Formelblad - Mekanik III FY303G

Hastighet naturliga koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_t$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_t = R\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Hastighet polära koordinater 2D: $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{v} = R\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = R\omega \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Acceleration naturliga koordinater 2D: $\mathbf{a} = \ddot{s} \hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_n$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = R\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + R\omega^2 \hat{\mathbf{e}}_n = R\alpha \hat{\mathbf{e}}_t + R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

Acceleration polära koordinater 2D: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Specialfall - cirkelrörelse: $\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_r + R\ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{e}}_r + R\alpha \hat{\mathbf{e}}_\theta$

Kraftmoment m.a.p en fix punkt O : $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Rörelsemängd: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Impulslagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt O : $\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Impulsmomentlagen: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = \mathbf{L}_O(t_2) - \mathbf{L}_O(t_1)$

En krafts effekt: $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

En krafts arbete: $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

En krafts arbete om kurvan C längs x-axeln: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$

Newtons andra lag: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{p}}$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}mv^2$

Lagen om kinetiska energin: $W = T_2 - T_1$

Potentiell energi tyngdkraftsfältet: $V = mgz$

Potentiell energi fjäder: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Fjäderkraft (konservativ): $F = kx$

Friktionskraft (icke konservativ): $F = \mu N$

Mekaniska energilagen: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Energilagen med arbete: $W + T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Partikelsystem och stela kroppar

Newtons andra lag för tyngdpunkten **TP**: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{TP} = m\dot{\mathbf{v}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$

Rörelsemängd: $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_{TP}$

Rörelsemängdsmoment m.a.p **O**: $\mathbf{L}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$

Rörelsemängdsmoment m.a.p fix punkt **O**: $\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_{TP} \times m \mathbf{v}_{TP} + \mathbf{L}_{TP}$

Momentekvation m.a.p fix punkt **O**: $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_O$

Rörelsemängdsmoment m.a.p **TP**: $\mathbf{L}_{TP} = \sum_i m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i$

Rörelsemängdsmoment (plan rotation) m.a.p **TP**: $\mathbf{L}_{TP} = I_{TP} \omega \hat{\mathbf{e}}_z$

Momentekvation m.a.p **TP**: $\mathbf{M}_{TP} = \dot{\mathbf{L}}_{TP}$

Kinetiska energins delar: $T = \frac{1}{2} m v_{TP}^2 + \frac{1}{2} I_{TP} \omega^2$

Kinetisk energi - rotation fix axel genom O : $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

Steiners sats - rotation axel genom O : $I_O = I_{TP} + md^2$

Rotation fix axel - hastighet: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = r\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Rotation fix axel - acceleration: $\mathbf{a} = r\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

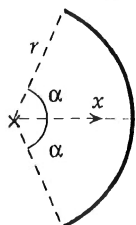
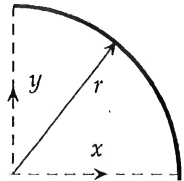
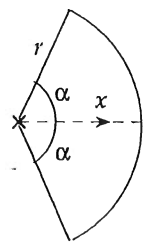
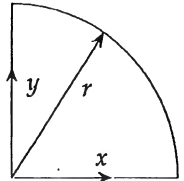
Sambandsformel för hastighet: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + r_{AB}\omega \hat{\mathbf{e}}_t$

Sambandsformel för acceleration: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + r_{AB}\dot{\omega} \hat{\mathbf{e}}_t + r_{AB}\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_n$

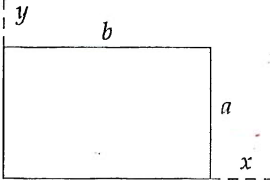
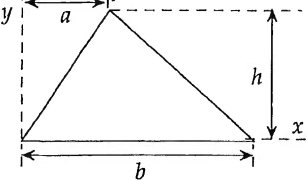
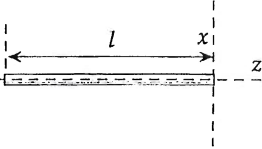
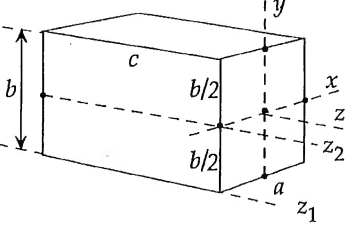
(b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

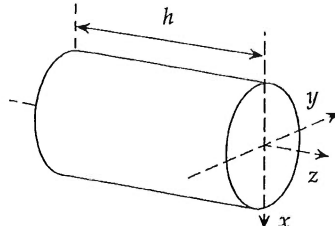
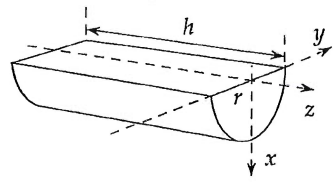
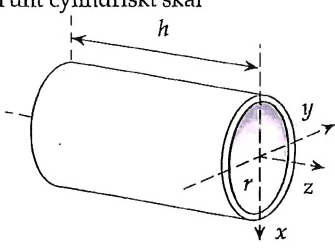
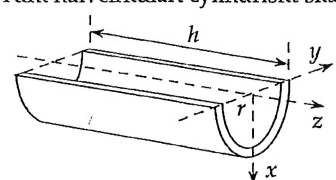
(Beteckningen m står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	
Tunn skiva, kvartscirkel 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$

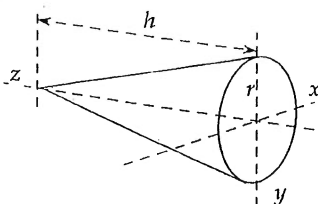
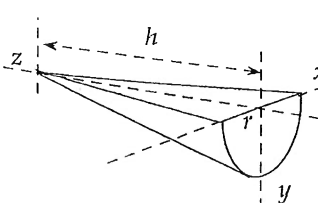
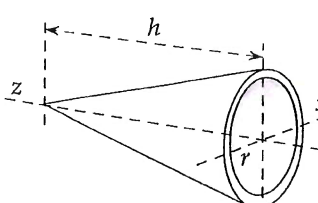
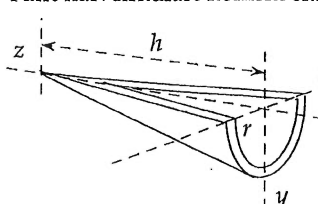
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
<p>Tunn skiva, rektangel</p> 		$I_x = \frac{1}{3}ma^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ma^2$
<p>Tunn skiva, triangel</p> 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{18}mh^2$
<p>Smal rak stång</p> 		$I_z = 0$ $I_x = \frac{1}{3}ml^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{12}ml^2$
<p>Rätblock</p> 		$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_1} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ $I_{z_2} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{12}mb^2$

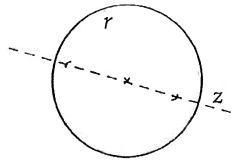
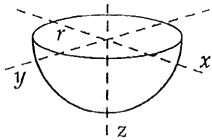
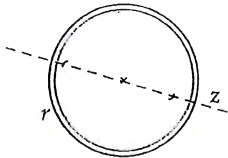
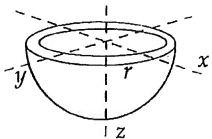
Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Cirkulär cylinder 		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_z = mr^2$ $I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\bar{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $\bar{I}_y = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$

Tabell AII.1 forts.

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Rak cirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\bar{z} = \frac{h}{4}$ $\bar{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{3}{20} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\bar{z} = \frac{h}{3}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $\bar{I}_x = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$

Tabell AII.1 forts..

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Halvsfär 	$\bar{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{83}{320}mr^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3}mr^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\bar{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_x = \frac{5}{12}mr^2$